Devoir surveillé n°2

Les documents, la calculatrice, et tout matériel électronique sont interdits.
Le soin, la précision et la qualité de la rédaction seront pris en compte dans la notation.

Exercice 1. *Matrices et espaces vectoriels, d'après EMLyon 2003.*

On note $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Calcul des puissances de la matrice A

1. Déterminer le rang de la matrice A. *On attend des explications.*

2. Calculer les matrices A^2 et A^3, puis vérifier que $A^3 = A^2 + 2A$.

3. Montrer que la famille (A, A^2) est une famille libre.

4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$A^n = \left(-\frac{2}{3}\ (-1)^n + \frac{1}{6}\ 2^n\right) A + \left(\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}\ 2^n\right) A^2$$

Partie B : Diagonalisation de la matrice A.

5. Justifier, sans aucun calcul, que la matrice A est diagonalisable.

6. En utilisant la question ***2.***, donner les valeurs propres possibles de la matrice A.

7. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.

8. Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

9. Proposer une autre méthode pour calculer A^n, en utilisant les calculs de la partie **B**.

Partie C : Étude d'un espace vectoriel de matrices.

On considère l'ensemble

$$F = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ ;\ AM = A^2M\right\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des matrices M carrées d'ordre 3 telles que $AM = A^2M$.

10. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

11. Montrer qu'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ vérifie $AM = A^2M$

si et seulement si $a = b = c = 0$, $g = -d$, $h = -e$ et $i = -f$.

12. En déduire la forme de la matrice M, et une famille génératrice de l'espace vectoriel F.

13. Donner la dimension de l'espace vectoriel F.

Partie D : Étude de trois suites imbriquées.

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = -6,\ v_0 = -4,\ w_0 = -2 \ \text{ et } \ \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n + w_n + 6 \\ v_{n+1} = u_n + 3 \\ w_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$$

On notera, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

14. Préciser le vecteur-colonne X_0.

15. Montrer que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.

16. Déterminer un vecteur-colonne $L \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $L = AL + B$.

17. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$X_n = A^n(X_0 - L) + L$$

18. Déterminer l'expression de X_n en fonction de n, et en déduire u_n , v_n et w_n en fonction de n.

19. Déterminer les limites de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

20. Compléter l'algorithme Python suivant afin de calculer les valeurs de u_n, v_n et w_n, pour une valeur n entrée par l'utilisateur :

```
import numpy as np

n=int.input('Entrez n')

u=np.zeros(n+1)
v=np.zeros(n+1)
w=np.zeros(n+1)                # Définition des trois suites

u[0]= ...
v[0]= ...
w[0]= ...

for k        ...        :
    u[k+1]=        ...
    v[k+1]=        ...
    w[k+1]=        ...

print('un = ', u[n])
print('vn = ', v[n])
print('wn = ', w[n])
```

Exercice 2. *D'après ECRICOME 2019.*
Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x > 0 \qquad h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$h_n'(x) = n\,\frac{x^{2n} - 1}{x^{n+1}}$$

2. Justifier que h_n est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

3. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

4. (a) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}$$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad h_{n+1}(v_n) \geq 4$.

(c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

5. (a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geq 1$.

(b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty$. En déduire une contradiction.

(c) Déterminer la limite de (v_n).

6. **Étude informatique**

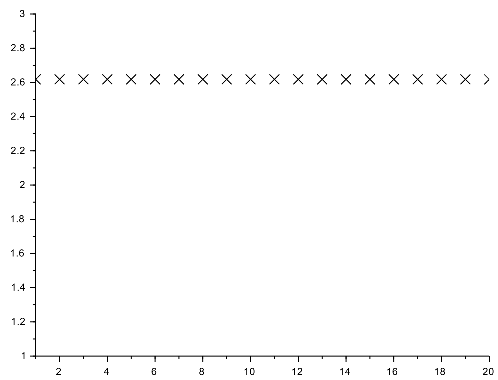
On considère le script Python suivant :

```
N=int(input('Entrez N'))

def f(x):
    return x**N+1+1/(x**N)      #Définition de la fonction f

x=1
while f(x)<4:
    x=x+0.01                    #Incrément de la variable

print(x-0.01,x)
```

(a) On exécute le script, et on entre 4 au clavier. Le script affiche `1.27 1.28`. Que signifie ce résultat ?

(b) Expliquer le but du script précédent.

(c) En ajustant le script, on a calculé des valeurs approchées de v_n^n pour $n = 1, ..., 20$.
Elles sont représentées dans le graphique suivant :



Que peut-on conjecturer ?

7. Montrer que : $\forall n \geq 1, \qquad (v_n)^n = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$

8. Retrouver ainsi le résultat de la question ***4.*** (c).

Exercice 3. *D'après ECRICOME 2015.*
On considère la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 1$ et pour tout entier non nul n :

$$u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$$

1. (a) Montrer que pour tout réel x, on a :

$$e^x \geq x + 1$$

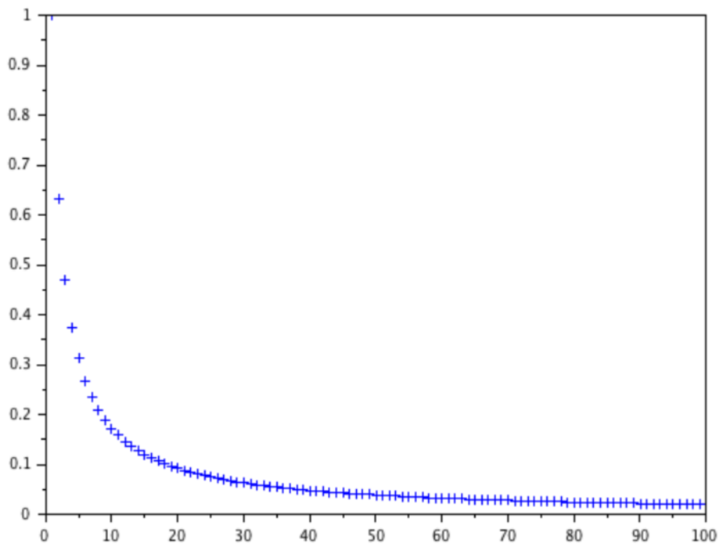
(b) Montrer que l'égalité a lieu **si et seulement si** $x = 0$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

3. Recopier et compléter l'algorithme Python suivant afin de calculer les cent premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

```
from math import *
u=1
for k ...
        u= ...
print(u)
```

4. En ajustant le programme précédent, on obtient la représentation graphique suivante :



Conjecturer le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

5. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

6. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. Á l'aide de la question ***1.*** montrer successivement que

$$u_{n+1} \geq \frac{u_n}{1 + u_n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{u_n}$$

8. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \geq \frac{1}{n}$$

9. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.