La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute **calculatrice** *et de* **tout matériel électronique** *est interdite.*

Le sujet comporte 4 pages ainsi qu'une annexe que vous devrez rendre avec votre copie.

Exercice 1. *D'après EDHEC 2016.*
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2 .

2. (a) En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f) .
(b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f .

4. (a) On pose $u_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
(b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.
(c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer , pour tout entier naturel n , la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N , puis de I et T .

5. (a) Expliquer pourquoi l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I$$

(b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A .
(c) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.***(a) reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2. *D'après EDHEC 2010.*
Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

2. (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
(b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.

3. Sur la feuille annexe, compléter l'algorithme **Python** afin qu'il calcule u_n pour une valeur n entrée par l'utilisateur.

4. (a) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1 + x) \leq x$.
(b) En déduire que $\ln(u_n) \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$, puis donner un majorant de $\ln(u_n)$ et un majorant de (u_n).

5. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $\left[2, e^2\right]$.

6. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
(a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
(b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
(c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question ***4.*** (a), que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leq \dfrac{1}{2^n}$.
(d) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.
(e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - e^{-x} \leq x$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ell - u_n \leq \dfrac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Exercice 3. *D'après EDHEC 2012.*
On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0;1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité p et "Face" avec la probabilité q.
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :
• Soit si l'on a obtenu "Pile" .
• Soit si l'on a obtenu n fois "Face".
Pour tout entier naturel k non nul, on note les événements

$$P_k : \text{« on obtient "Pile" au } k^{\text{e}} \text{ lancer ».}$$

et

$$F_k : \text{« on obtient "Face" au } k^{\text{e}} \text{ lancer ».}$$

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus.

1. **Dans cette première question uniquement**, on suppose que $n = 3$.
Ainsi, à titre d'exemple,
- Si on obtient la succession "Face-Pile", on arrête les lancers et on a $T_3 = 2$ et $X_3 = Y_3 = 1$.
- Si on obtient la succession "Face-Face-Face", on arrête les lancers et on a $T_3 = 3$, $X_3 = 0$ et $Y_3 = 3$.

(a) Déterminer la loi de T_3 sous forme de tableau et calculer $E(T_3)$.
(b) Reconnaître la loi de X_3 et donner $E(X_3)$ et $V(X_3)$.
(c) Donner une relation entre T_3, X_3 et Y_3, en expliquant brièvement.
En déduire $E(Y_3)$.

On revient au cas général, où n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.

2. Loi de T_n.

(a) Pour tout k de $[\![1; n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $P(T_n = k)$.
(b) Déterminer $P(T_n = n)$.
(c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.
(d) Soit $x \in]0;1[$. Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}$$

(e) En déduire que T_n possède une espérance et vérifier que $E(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

3. Loi de X_n.

(a) Donner la loi de X_n .
(b) Vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.

4. Loi de Y_n.

(a) Déterminer, pour tout k de $[\![0; n-1]\!]$, la probabilité $P(Y_n = k)$.
(b) Déterminer $P(Y_n = n)$.
(c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n , puis en déduire $E(Y_n)$.

5. Simulation informatique.
Sur la feuille annexe, compléter l'algorithme **Python** afin de simuler les variables aléatoires X_n, Y_n et T_n , lorsque n et p sont données par l'utilisateur.

Problème. *D'après EDHEC 2018.*

On considère la fonction f qui à tout réel x associe :

$$f(x) = \int_0^x \ln\left(1+t^2\right) dt$$

et on rappelle à toutes fins utiles que $\ln(2) \simeq 0.7$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : Étude de f

1. (a) Justifier que la fonction f ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f'(x) = \ln(1+x^2)$$

(b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).

2. Étudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

3. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

(a) En écrivant $\ln(1+t^2) = 1 \times \ln(1+t^2)$ et en intégrant par parties, montrer que pour tout réel x on a :

$$f(x) = x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$$

(b) Justifier que

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ 0 \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$$

et en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+\ ,\ x\ln(1+x^2) - 2x \leq f(x) \leq x\ln(1+x^2)$$

(c) En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)$.

(d) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x)$$

4. (a) Montrer que la fonction f est impaire. *On pourra utiliser un argument de géométrie.*

(b) En utilisant les questions précédentes, déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

(a) Montrer que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.
On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est à dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + o(x^3)$$

(b) Déterminer $f(0), f'(0), f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$. *On rappelle que $f^{(3)} = f'''$.*

(c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. (On trouve $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$)

Partie B : Étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$.

7. (a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

(b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.

8. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

9. (a) Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$$

(b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

10. (a) Montrer que :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}$$

(b) En déduire la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt$$

(c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt$$

(d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt$$