Devoir surveillé n°4

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute ***calculatrice*** *et de* ***tout matériel électronique*** *est interdite.*

Exercice 1.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I. Première partie

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier : $A^3 = A^2 + 2A$.
2. Montrer que la famille $\left(A, A^2\right)$ est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un couple unique (a_n, b_n) de nombres réels tel que :
$$A^n = a_n A + b_n A^2$$
et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche a_n et b_n pour un entier n donné supérieur ou égal à 1.
5. (a) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :
$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$$
   (b) En déduire a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
   (c) Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

II. Seconde partie

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est A.

1. Déterminer une base de $Im(f)$ et donner la dimension de $Im(f)$.
2. (a) Est-ce que f est diagonalisable ?
   (b) Est-ce que f est bijectif ?
3. Déterminer les valeurs propres de f, et donner, pour chaque sous-espace propre de f, une base de ce sous-espace propre.
4. Déterminer une matrice diagonale D dont les termes diagonaux sont dans l'ordre réel croissant, et une matrice inversible P dont la troisième ligne est formée de termes tous égaux à 1, telles que $A = PDP^{-1}$.
5. Vérifier que
$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
6. On cherche à déterminer l'ensemble ε des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :
$$AM + MA = 0$$
   (a) Soit $N = P^{-1}MP$, où la matrice P a été définie à la question 4.
   Montrer que
$$DN + ND = 0$$
   (b) En déduire la forme de la matrice N.
   (c) En déduire la forme de la matrice M.
   (d) Conclure que ε est un espace vectoriel de dimension 1, dont on donnera une base.

Exercice 2.
On note $\mathrm{e} = \exp(1)$, et $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$.

On considère, pour tout nombre réel a non nul, l'application $f_a : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f_a(x,y) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{y} - \frac{y}{a}$$

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes entre elles.

I. Première partie

Dans cette première partie, on prend $a = -\mathrm{e}$, et on note g à la place de $f_{-\mathrm{e}}$. Ainsi, l'application $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad g(x,y) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{y} + \frac{y}{e}$$

1. Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g en tout point (x,y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer qu'il existe un couple unique (x,y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ en lequel les deux dérivées partielles d'ordre 1 de g s'annulent, et calculer ce couple.
4. Est-ce que g admet un extremum ?

II. Seconde partie

Dans cette seconde partie, on prend $a = 1$.

On considère, pout tout entier n tel que $n \geqslant 1$, l'application $h_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad h_n(x) = f_1(x, x^n) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^n} - x^n$$

et l'application $\varphi_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \varphi_n(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^{2n-1}$$

1. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad h_n(x) = 0 \Longleftrightarrow \varphi_n(x) = 0$$

2. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'équation $h_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée u_n, et que :

$$0 < u_n < 1$$

On se propose d'étudier la suite (u_n), définie par la relation $h_n(u_n) = 0$ ou encore $\varphi_n(u_n) = 0$.

3. Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $\ln(u_n) = -\dfrac{u_n}{2n-1}$.
4. En déduire : $u_n \to 1$ quand $n \to +\infty$
5. On se propose de déterminer un équivalent de $u_n - 1$ au voisinage de $+\infty$.
   (a) Donner le développement limité de la fonction $g(x) = e^x$ au voisinage de 0.
   (b) En déduire un équivalent de $e^x - 1$ au voisinage de 0.
   (c) Justifier que $u_n = e^{-\frac{u_n}{2n-1}}$, et en déduire que $u_n - 1 \sim_{+\infty} -\frac{1}{2n}$.

Exercice 3.

.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ est convergente et calculer sa valeur

   Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 2 \\ f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

2. Montrer que f définit une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

   On considère trois variables aléatoires indépendantes T_1, T_2 et T_3, chacune de même loi que X.

4. On considère la variable aléatoire $V = \sup(T_1, T_2, T_3)$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (V \leqslant t) = (T_1 \leqslant t) \cap (T_2 \leqslant t) \cap (T_3 \leqslant t)$$

   (a) Déterminer la fonction de répartition H de V.
   (b) Montrer que V admet une densité et déterminer une densité h de V.
   (c) La variable aléatoire V admet-elle une espérance ?
5. On considère la variable aléatoire $U = \inf(T_1, T_2, T_3)$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (U > t) = (T_1 > t) \cap (T_2 > t) \cap (T_3 > t)$$

   (a) Déterminer la fonction de répartition G de U.
   (b) Montrer que U admet une densité et déterminer une densité g de U.
   (c) Montrer que U admet une espérance et calculer $E(U)$.