Exercice. *Séries de Riemann.*

1. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

   (a) Quel est le sens de variation de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie ?

   (b) Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

   (c) Justifier que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. Pour tout entier naturel non nul n on pose :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$$

   (a) Justifier que $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   (b) En déduire que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. *On s'inspirera de la question 2.*

4. Justifier, de façon générale, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha \geq 2$.