Feuille d'exercices 19 : Dérivation

Exercice 1. *Dérivabilité en un point.*
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point indiqué :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |x|^3$ au point $a = 0$
2. $\forall x \in [1; +\infty[\,, g(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ au point $a = 1$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = x\,|x|$ au point $a = 0$.

Exercice 2. *Contre-exemple : fonction de classe $\mathcal{C}^1$ non deux fois dérivable.*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer, dans l'ordre, que :

1. f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. f n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *Calcul d'une dérivée n-ième.*
Soit f la fonction définie pour $x \neq -1$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$.
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ et $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\ n!}{(x+1)^{n+1}}$

Exercice 4. *Étude complète d'une fonction et tracé à main levée.*
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Montrer que la fonction f est impaire.
2. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$, et calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f, en y indiquant $f(0)$ et les limites en $\pm\infty$.
4. Étudier la convexité de f. Sa courbe représentative admet-elle un point d'inflexion ?
5. Tracer la courbe représentative de la fonction f à main levée.
   On y fera apparaître tous les éléments obtenus grâce aux question précédentes.

Exercice 5. *d'après EMLyon 2014.*
On considère l'application $\varphi :]0; +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

1. Montrer que φ est de classe C^3 sur $]0; +\infty[$, calculer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer :
$$\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$$
2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
3. En déduire le sens de variation de φ', et montrer :
$$\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) \geqslant e$$
4. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en y indiquant les limites en 0 et en $+\infty$.

Exercice 6. *Convexité.*
Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^x)$ est convexe.

Exercice 7. *Convexité, point d'inflexion et tangente.*
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = -x^2 + 3x - \ln(x)$.

1. Étudier la convexité de f et ses points d'inflexion.
2. Déterminer les tangentes horizontales de $\mathcal{C}_{\mathrm{f}}$.

Exercice 8. *Application de l'IAF à une série.*

1. Soit k un entier naturel non nul. En appliquant l'inégalité des accroissements fini à la fonction ln sur l'intervalle $[k; k+1]$, montrer que
$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$
2. En déduire la divergence de la série $\sum\limits_{k \geq 1} \frac{1}{k}$.

Exercice 9. *Étude d'une suite homographique.*

Partie A : Étude d'une fonction.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$.
2. Dresser le tableau de variations de f, en précisant $f(1)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ dans ce tableau.
3. Justifier l'implication $x \in [0,1] \implies f(x) \in [0,1]$.
On pourra s'appuyer sur le tableau de variations.
4. Établir que pour tout réel $x \in [0,1]$ on a

$$|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$$

Partie B : Étude d'une suite.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$$

5. Démontrer, pour tout entier naturel n, que $u_n \in [0,1]$.
6. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4}|u_n - 1|$$

7. Établir pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante :

$$|u_n - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{1}{2}$$

8. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 10. *Application de l'IAF à une suite (difficile).*
On considère l'équation $(E)\ : e^x = 3 + 2x$.

1. Montrer que l'équation (E) possède une unique solution α sur $]-\infty;0]$.
Justifier que $-2 \leq \alpha \leq -1$ et que $\alpha = \frac{e^\alpha - 3}{2}$.
2. Soient g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x-3}{2}$ et (u_n) la suite définie par

$$u_0 = -1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n} - 3}{2}$$

Justifier que l'intervalle image de $]-\infty;0]$ par g est contenu dans $]-\infty;0]$.
3. Démontrer que $|\ g'(x)\ | \leq \frac{1}{2}$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 0$.
5. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha\ | \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha\ |$ et que $|u_n - \alpha\ | \leq \frac{1}{2^n}$.
6. En déduire que la suite (u_n) converge vers α
7. Trouver une valeur de n pour laquelle $|u_n - \alpha\ | \leq 10^{-9}$.
8. Écrire un programme Python qui renvoie une valeur approchée de α à 10^{-9} près.

Exercice 11. *Étude d'une fonction.*
On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Interpréter graphiquement cette limite.
3. Prouver que φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Dresser le tableau de variations de φ et y faire apparaître les limites de φ en 0 et en $+\infty$.
5. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$

On admettra que $\ln(2) \approx 0,7$ *et* $\ln(3) \approx 1,1$.