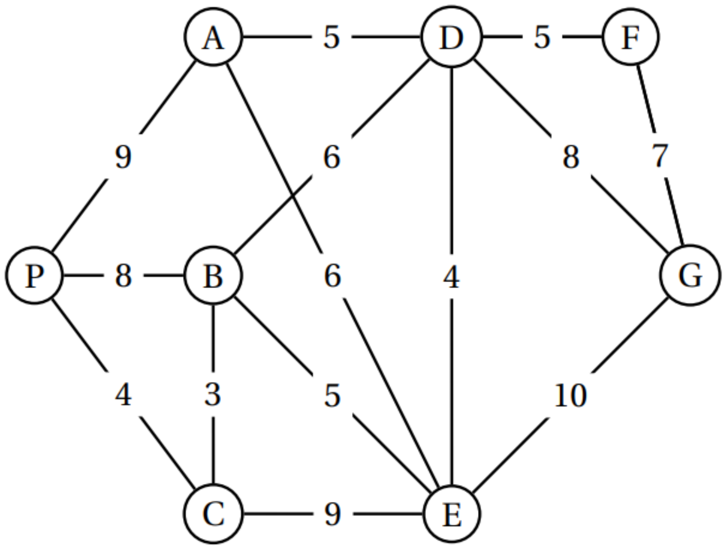
Les documents, la calculatrice, et tout matériel électronique sont interdits.
Le soin, la précision et la qualité de la rédaction seront pris en compte dans la notation.

Le sujet est composé de 5 exercices, et tient sur 4 pages.
Il est noté sur un total de 80 points.

Exercice 1. *Étude d'un graphe (8 points).*
Un réseau de navettes gratuites est mis en place entre des parkings situés aux abords de la ville et les principaux sites de la ville. Le graphe ci-contre indique les voies et les temps des liaisons, en minutes, entre ces différents sites.



1. Peut-on envisager un itinéraire qui relierait le parking P à la gare G en desservant une et une seule fois tous les sites ?
2. Peut-on envisager un itinéraire qui emprunterait une et une seule fois toutes les voies ?
3. Déterminer un trajet de durée minimale pour se rendre du parking P à la gare G.

Exercice 2. *Équation paramétrée (14 points).*
Partie A : Étude d'une fonction.
On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par
$$f(x) = xe^x$$
1. Calculer $f(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$ en y indiquant $f(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Justifier que la fonction f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers un intervalle à préciser.
4. Dresser le tableau de variations de la bijection réciproque f^{-1}.

Partie B : Étude d'une suite implicite.
À présent, on considère l'équation
$$(E_n) : \ xe^x = n$$
d'inconnue $x \in [0;+\infty[$, avec $n \in \mathbb{N}$ fixé.

5. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n) possède une unique solution dans $[0;+\infty[$.

Cette solution sera notée u_n, et on étudie désormais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée par ces solutions.

6. Résoudre l'équation (E_0) et en déduire la valeur de u_0.
7. Justifier que $u_n = f^{-1}(n)$, où f^{-1} est la bijection réciproque déterminée à la partie **A**.
8. En déduire le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3. *Étude de la convergence d'une série (13 points).*
On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$$

1. Calculer S_1, S_2 et vérifier que $S_3 = \frac{2}{3}$.

2. Déterminer le sens de variation de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Montrer par récurrence

$$\forall k \geq 2,\ 2^k \geq k-1$$

4. En déduire que

$$\forall k \geq 2,\ \frac{1}{k2^k} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

5. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$$

6. Justifier la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

7. Compléter l'algorithme Python suivant afin qu'il demande un entier n à l'utilisateur, et qu'il calcule la somme S_n.

```
n = int.input('Entrez n')
S = ...

for ...
        S = ...

print(S)
```

Exercice 4. *Étude d'une suite homographique (30 points).*

L'objectif de cet exercice est d'étudier la convergence d'une suite.
Les parties A et B sont fortement liées, mais la partie C est indépendante de ces parties.

Partie A : Étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ en justifiant soigneusement vos calculs.

2. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$.

3. Dresser le tableau de variations de f, en précisant $f(1)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ dans ce tableau.

Partie B : Étude d'une suite.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$$

4. Démontrer, pour tout entier naturel n, que $u_n \in [0,1]$.

5. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite à l'aide de la méthode du point fixe.

7. Compléter l'algorithme Python suivant, afin qu'il demande un entier n à l'utilisateur et qu'il renvoie la valeur de u_n.

```
n = int.input('Entrez n')
u = ...

for ...
        u = ...

print(u)
```

Partie C : Approche matricielle.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice identité d'ordre 2 sera notée I_2, de sorte que $A = I_2 + J$.

8. (a) Calculer les matrices J^2, $A \times J$ et $J \times A$.

(b) Établir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la relation suivante :

$$A^n = I_2 + \frac{1}{2}(3^n - 1)J$$

On rappelle que $A^0 = I_2$.

(c) Donner l'expression de A^n sous forme matricielle.

9. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$p_0 = 1\ ,\ q_0 = 2 \text{ et pour tout entier } n,\ \begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2q_n \end{cases}$$

On considère également, pour tout entier n, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

(a) Que vaut X_0 ?

(b) Établir que pour tout entier naturel n on a $X_n = A^n X_0$.

(c) En déduire l'expression de X_n en fonction de n.
Donner également les expressions de p_n et q_n en fonction de n.

10. (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que

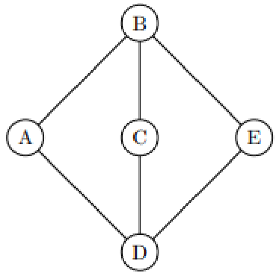
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{p_n}{q_n}$$

(b) Donner l'expression de u_n en fonction de n, et retrouver la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. *Étude d'un graphe (15 points).*

Partie A : Cas non-orienté

Cinq villages A, B, C, D, E sont reliés par des routes. On considère cinq amis : Aya habite le village A, Baptiste habite le village B, Cléo habite le village C, Dimitri habite le village D et Emma habite le village E. Ces cinq amis se déplacent à pieds sur ces routes. Ce réseau de routes est modélisé par le graphe non orienté ci-dessous :



Chaque arête de ce graphe représente une route de longueur 7 km.

1. Ce graphe est-il connexe ? Complet ? Justifier.

2. Déterminer la matrice d'adjacence M de ce graphe.

3. On admet que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$M^{2k} = 6^{k-1}M^2 \quad \text{et} \quad M^{2k+1} = 6^k M$$

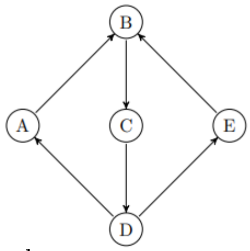
4. En déduire la matrice M^6.

5. Aya souhaite faire un marathon (42 km) en partant de son village A, en empruntant ce réseau routier et en arrivant chez elle au village A. On convient qu'Aya peut passer plusieurs fois par le même village, retourner au village A en cours de route, et ne fait pas demi-tour entre deux villages : quand elle sort d'un village, elle va jusqu'au village suivant. De combien de parcours différents dispose-t-elle ?

6. Baptiste souhaite faire un semi-marathon (21 km) en partant de son village B, en empruntant ce réseau routier et en arrivant chez lui au village B. On convient que Baptiste peut passer plusieurs fois par le même village, retourner au village B en cours de route, et ne fait pas demi-tour entre deux villages : quand il sort d'un village, il va jusqu'au village suivant. Est-ce possible ? Justifier.

Partie B : Cas orienté

Les cinq amis décident maintenant de faire du vélo et doivent donc respecter le sens de circulation sur chacune des routes qui sont en sens unique. Le réseau routier est alors modélisé par le graphe orienté suivant :



7. Déterminer la matrice d'adjacence N de ce graphe.

8. On admet que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En déduire que ce graphe orienté est connexe. *On attend un argument matriciel.*

9. Emma souhaite aller voir Aya à vélo et va donc du village E jusqu'au village A.
Quelle est la plus courte distance que doit parcourir Emma ? Donner un chemin correspondant à cette distance.