

*Le sujet est formé de trois exercices et un problème.
Il tient sur trois pages.*

Exercice 1. *D'après EDHEC 2003.*

Partie A : Étude d'une fonction

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{e^x - 1}{x} > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

2. Déterminer, en justifiant soigneusement vos calculs, les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
5. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x e^x - e^x + 1$
(a) Déterminer un développement limité de la fonction g à l'ordre 2 en 0.
(b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2}$.
(c) Conclure que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(0)$.
6. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
7. En déduire le signe de $g(x)$, puis dresser le tableau de variations de f (limites comprises).

Partie B : Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

8. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.
9. (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - x = f(-x)$.
(b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
10. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
11. Écrire un programme en Python permettant d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leq 10^{-3}$.

Exercice 2. *D'après EDHEC 2006.*

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$$

1. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
(b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .
(b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur de ce minimum.
3. (a) Développer $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$.
(b) En déduire que f présente un minimum global au point A .
4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$$

- (a) Utiliser la question 3. pour établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) \geq -\frac{1}{6}$.
(b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 3. *D'après EDHEC 2005.*

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pour $x \in [0; 1]$, calculer l'intégrale $\int_0^x f(t)dt$.
2. Montrer que f est une densité.
3. On considère la variable aléatoire X dont f est la densité.

Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

4. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = -\ln(1-X)$.
 - (a) Calculer $P(Y \leq x)$ pour $x \geq 0$, puis pour $x < 0$.
 - (b) En déduire la fonction de répartition de Y .
 - (c) Conclure que Y suit une loi exponentielle de paramètre n .
 - (d) Rappeler l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y .
5. Pour tout $\lambda > 0$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ converge et donner sa valeur en fonction de λ .
6. En utilisant le théorème de transfert, montrer que la variable e^Y possède une espérance et que

$$E(e^{-Y}) = \frac{n}{n-1} \text{ lorsque } n > 1$$

7. Exprimer X en fonction de Y et montrer que X possède une espérance qu'on exprimera en fonction de l'entier n .
8. Montrer que la variable aléatoire e^{-2Y} possède une espérance, et que $E(e^{-2Y}) = \frac{n}{n+2}$.
9. En la variance de e^{-Y} puis la variance de X .
10. On considère des variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes, suivant toutes les deux la même loi que X .
On définit par ailleurs la variable $T = \min(X_1, X_2)$, de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{R}, (T > x) = (X_1 > x) \cap (X_2 > x)$$

- (a) Déterminer $P(T > x)$ pour $x \in [0, 1]$.
- (b) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire T .
- (c) Calculer la densité de la variable aléatoire T .
- (d) En utilisant une analogie - que vous expliquerez - et les résultats précédents, donner $E(T)$ et $V(T)$ sans calcul.

Problème. *D'après EDHEC 2003.*

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie.

De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \quad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.

(a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :

$$P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$$

(b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.

(c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$.

Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$.

2. (a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer PQ . En déduire que P est inversible et donner son inverse.

(b) On note C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de P . Calculer MC_1, MC_2, MC_3 et MC_4 , puis en déduire que $-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ et 1 sont les valeurs propres de M .

(c) Justifier que $M = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on déterminera.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.

(b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geq 2, \quad U_n = M^{n-2}U_2$.

(c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n , puis en déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.

(d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}$$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ième}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

(a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k .

(b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k .

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

(a) Calculer $P(S_n = 2)$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geq 4$.

(b) Déterminer $P(S_n = n)$.

(c) Pour tout entier $n \geq 3$, écrire S_n en fonction des variables X_k , puis déterminer $E(S_n)$ en fonction de n .