

SG. Sujet A

Cours: un graphe connexe possède une chaîne Eulérienne
 $\Leftrightarrow$ tous les sommets sont de degré pair
ou 2 sommets exactement sont de degré impair

Exercice 1: $x^4 - 2x^3 + 1 = x^4 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4}\right)$ d'où $L_1 = +\infty$
 $(+\infty)$

$L_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^x + 1}{x^2 + 1} \right) = 0$ par quotient

$\frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2}$ d'où $L_3 = \frac{1}{4}$
 $(x \rightarrow 1)$

Exercice 2: 1) connexe: tous les couples de sommets sont reliés par une chaîne.
 2) Oui: Eulérien: seuls D et F sont de degré impair (3)
 D H F A B C D E A C E F

3)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $a_{2,7} = 6$ il existe 6 chemins de longueur 4 entre B et H
 B C A F H B A C D H
 B C E D H B A E F H
 B C E F H B A E D H

5) ? = 2 + 4 allers-retours + 2 "carré" = 8
 (allers-retours double)

Exercice 3: $\phi(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = -\infty$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 1$ (croissance comparée)
 donc ϕ continue en 0 donc sur $\mathbb{R}_+$

3) somme et produit de fct dérivables $\phi'(x) = -2x \ln x - x$ si $x > 0$
 $= -x(2 \ln x + 1)$

4)

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$\phi'(x)$		+	0 -
$\phi(x)$	1	$\rightarrow +\frac{1}{2e}$	$\rightarrow -\infty$

5) $\phi(\sqrt{e}) = 1 - \ln 2 > 0$
 $\phi(2) = 1 - 4 \ln 2 < 0$ + TVI

S6. Sujet B

Cours : si $\mu(x) \leq f(x) \leq \nu(x)$ sur un ouvert contenant A
 et si $\lim_{x \rightarrow A} \mu(x) = \lim_{x \rightarrow A} \nu(x) = \alpha$ alors $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = \alpha$

Exercice 1 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 1 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ donc f est continue en 0

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 4$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = 3$ donc f n'est pas continue en 1

Exercice 2 : 1) Γ n'est pas complet (3 et 4 non adjacents)
 Γ est connexe : tous les sommets sont liés
 2 à 2 par une chaîne

2) oui (il est Eulerien) 1 2 3 5 2 4 1 5

3)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 4) $a_{1,4} = 5$ chaînes de longueur 3 entre 1 et 4

1414 1424
 1214
 1524
 1514

5) ? = 4 (2 triangles dans les 2 sens pour aller de 5 en 5 en 3 coups)

Exercice 3 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$
 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x-1)(x+3)$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$		
signe f'		$+$	0	$-$	0	$+$
variations f			$\nearrow 28$		$\searrow -4$	$\nearrow +\infty$

(2) tableau de variation : f s'annule 3 fois (TVI sur 3 intervalles)

(3) $f(x) = 2$ possède 3 solutions (même explication)

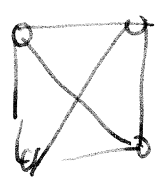
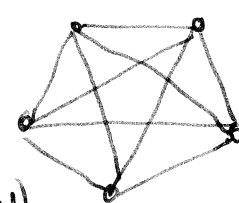
4) a) $f(x) = \alpha$ admet toujours des solutions (f surjective sur $\mathbb{R}$)

b) $\alpha \in]-\infty; -4[$ $\{ -4 \}$ $]-4; 28[$ $\{ 28 \}$ $]28; +\infty[$
 1 solution 1 solution 3 solutions 1 solution 1 solution

SG. Lijet C

Cours : TVI : une fonction continue prend toutes les valeurs de son intervalle image.
 et de plus la fonction est monotone chaque valeur est prise une seule fois.

Exercice 1 1°) K_3 :  3 arêtes
 un graphe complet
 est nécessairement connexe

2°) K_4 :  6 arêtes K_5 :  10 arêtes

3°) K_n comporte n sommets de degré $(n-1)$

Euler : $\sum \text{degré} = 2 \times \text{nombre d'arêtes}$, donc $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes

4°) K_{12} représente la situation (12 personnes, chaque arête correspond à une poignée de mains) ; $\frac{12 \times 11}{2} = 66$ poignées de mains

Exercice 2 $f(x) = \ln(1+x) - x$ $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$
 1°) $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ $g'(x) = \frac{-x}{1+x} + x = \frac{x^2}{1+x}$

2°)

x	0	$+\infty$
f	0	$-\infty$

x	0	$+\infty$
g	0	$+\infty$

3°) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x$ et $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ d'où le résultat

4°) avec $x > 0$ il vient $1 - \frac{x}{2} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1$ par encadrement
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) = 1$

Exercice 3 $f_n(x) = x^{n+1} + 1 - nx$

1°) $f'_n(x) = (n+1)x^n - n = n(x^{n+1} - 1)$ négatif sur $[0; 1]$ donc f_n décroît
 ainsi f bijective de $[0; 1]$ vers $[2-n; 1]$

2°) $n \geq 2$ donc $2-n \leq 0$ TVI : $\exists ! u_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$
 et $u_2 = 1$

3°) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+2} - (n+1)x - x^{n+1} + nx = x^{n+2} - x^{n+1} - x = x^n(x-1) - x$

est négatif dans $[0; 1]$ (somme de négatifs)

avec $x = u_{n+1}$ on obtient $-f(u_{n+1}) \leq 0$ donc $f(u_{n+1}) \geq 0$

ainsi $u_{n+1} \leq u_n$ puisque f est décroissante. Donc (u_n) est décroissante par encadrement
 5°) $f_n(1/n) > 0$ et $f_n(2/n) < 0$ $\lim(u_n) = 0$