S4. Sujet A

cours : $P(X) = aX^2 + bX + c$ si $\Delta (= b^2 - 4ac) > 0$

alors $P(X) = a\left(X - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(X - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

si $\Delta = 0$ $P(X) = a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2$ si $\Delta < 0$ pas de racines ni factorisation

application : $P(X) = X^2 - 2(m+1)X + 2m+1$

$\Delta = 4(m+1)^2 - 4(2m+1) = 4m^2$

si $m = 0$ $P(X) = (X-1)^2$

si $m \neq 0$ $P(X) = (X-1)(X-2m-1)$

Exercice 1 $P(x) = 2x^3 + x^2 - 23x + 20$

1) $P(1) = 0$

2) $P(X) = (X-1)(2X^2 + 3X - 20)$ $\Delta = 169 = 13^2$

$X_0 = 1$ $X_1 = \frac{-3-13}{4} = -4$ $X_2 = \frac{5}{2}$

3)

4) $\iff \frac{P(e^x)}{e^x} = 0 \iff P(e^x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$

($e^x = -4$ impossible)

Exercice 2

1) récurrence immédiate

2) $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2 - u_n(1+5u_n)}{1+5u_n} = \frac{-3u_n^2 - u_n}{1+5u_n} \leq 0$ car $u_n \geq 0$

donc $(u_n) \searrow$

3) convergence monotone 4) $l = \frac{2l^2}{1+5l} \iff 3l^2 + l = 0$

$\iff l = 0$ (ou $l = -\frac{1}{3}$ impossible car $u_n \geq 0$)

Exercice 3 $P_n(X) = X^n - 1$ 1) $P_n(1) = 0$

2) a) b) $P_2(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ $P_3(X) = X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$

3) $\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \frac{1-X^n}{1-X}$ d'où $P_n(X) = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$

4) $P_n'(X) = nX^{n-1}$

si n est pair (racines -1 et 1 par parité)

X	$-\infty$		0		$+\infty$
P_n'		$-$	0	$+$	
P_n	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

si n impair (racine 1)

X	$-\infty$		0		$+\infty$
P_n'		$+$	0	$+$	
P_n	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

S4 - Sujet B

Cours : une suite décroissante minorée converge

" croissante majorée "

exemples : $u_n = -n$ décroissante diverge

$u_n = (-1)^n$ minorée par -1 diverge

$u_n = 1 + \frac{1}{n}$ minorée par 0 converge vers 1

Exercice 1 $P(x) = 3x^3 - x - 2$ 1) $P(1) = 0$

2) $P(x) = (x-1)\underbrace{(3x^2+3x+2)}$

$\Delta = 9 - 24 < 0$ donc facteur positif

3) ainsi : $P(x) < 0$ sur $]-\infty; 1[$

$P(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$

$P(x) = 0$ si $x = 1$

4) $\Leftrightarrow P(x) \leq 0$ solutions $]-\infty; 1]$

Exercice 2

1) $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$ $u_1 = \frac{1}{4}$ $u_2 = \frac{3}{16}$ $u_3 = \frac{39}{256}$

2) $f(x) = x(1-x) = x - x^2$ $f'(x) = 1 - 2x$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

récurrence : (I) : $u_0 \in [0; 1]$

(H) $u_n \in [0; 1] \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) \in [0; 1]$

3) $u_{n+1} - u_n = -u_n^2$ (u_n) est décroissante minorée par 0 donc cv.

4) $l = l(1-l) \Leftrightarrow -l^2 = 0 \Leftrightarrow l = 0$

Exercice 3 $f(x) = x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 3$

$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 20x = 4x(x^2 - 6x + 5) = 4x(x-1)(x-5)$

x	$-\infty$		0		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-128	$\nearrow$	$+\infty$

$f(5) = 625 - 1000 + 250 - 3$

$f(5) = -128$

2) f surjective de $\mathbb{R}$ vers $[-128; +\infty[$

3) f admet 3 racines dont 1 (1 nécessairement racine double : polynôme de deg 3 → nombre impair de racines)

$f(x) = (x-1)(x^3 - 7x^2 + 3x + 3) = (x-1)^2(x^2 - 6x - 3)$

$f(x) = (x-1)^2\left(x - \frac{6-\sqrt{48}}{2}\right)\left(x - \frac{6+\sqrt{48}}{2}\right) = (x-1)^2(x-3+\sqrt{12})(x-3-\sqrt{12})$

S4 - Sujet C

Cours : a racine de P si $P(a)=0$

$P(x) = (X-1)(X-2)(X-3)$ a pour seules racines 1, 2 et 3

Exercice 1 : 1) $u_0 = 0$ $\quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n+1}{2+u_n}$ $\quad u_1 = \dfrac{1}{2}$ $\quad u_2 = \dfrac{4}{5}$ $\quad u_3 = \dfrac{13}{14}$

2) $f(x) = \dfrac{2x+1}{2+x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{3}{(2+x)^2} > 0$

x	0	1
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ $\nearrow$	1

2bis) récurrence $\quad 0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1 \quad P_0$ vraie

P_n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$ car f est croissante

$\Rightarrow P_{n+1}$ $\square$

3) (u_n) croissante majorée par 1 donc cv.

4) $L = \dfrac{2L+1}{2+L} \Leftrightarrow 2L + L^2 = 2L+1 \Leftrightarrow L^2 = 1 \Leftrightarrow L = 1$ car $u_n > 0$

Exercice 2 $\quad P(x) = X^4 - 4X^3 + 10X^2 - 12X + 8$

1) $P(x) + 1 = X^4 - 4X^3 + 10X^2 - 12X + 9 = (X^2 - 2X + 3)^2$

2) d'où $P(x) = (X^2 - 2X + 3 + 1)(X^2 - 2X + 3 - 1) = (X^2 - 2X + 4)(X^2 - 2X + 2)$

3) inéquation $P(x) \leq 0$ solutions $\emptyset$ (2 discriminants négatifs)

Exercice 3 1) $P(x) = aX^2 + bX + C$ $\qquad P(1) = 0 \Leftrightarrow a+b+c = 0$

$P'(x) = 2aX + b$ $\qquad P'(1) = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0$

soit $\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = -2a \\ c = a \end{cases}$ $\qquad P(x) = aX^2 - 2aX + a = a(X-1)^2$

2) a) $P(1) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (X-1)Q(X)$

b) $P'(x) = Q(x) + (X-1)Q'(x)$ or $P'(1)=0$ d'où $Q(1) = 0$

et $Q(x) = (X-1)R(x)$ $\qquad$ c) il vient finalement $P(x) = (X-1)^2 Q(x)$

(remarque : une racine double annule le polynôme et sa dérivée)

Exercice 4 $\quad P(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

d'où $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{x+2}{x-1}$ et $L = 4$

S4. Sujet spécial k

Cours : $P(x) = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n)\,Q(x)$ et $\deg P \geqslant n$

Exercice 1 $P(x) = x^4 - 41x^2 + 400 = y^2 - 41y + 400$ avec $y = x^2$

$\Delta = 41^2 - 4\times 400 = 1681 - 1600 = 81 \qquad y_1 = 25 \quad y_2 = 16$

soit $P(x) = (x^2-25)(x^2-16) = (x-5)(x+5)(x-4)(x+4)$

Exercice 2

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad A^2 - 6A + 9I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -12 & 21 \end{pmatrix} A^2$

2) dans la division euclidienne de X^n par (X^2-6X+9), le quotient $Q(x)$ est de degré $n-2$ et le reste $aX+b$ de degré 1

3) $X^n = (X-3)^2 Q(x) + aX + b$ si $X=3$ il vient $3a+b = 3^n$

en dérivant $nX^{n-1} = 2(X-3)Q(x) + (X-3)^2 Q'(x) + a$

si $X = 3$ il vient $a = n3^{n-1}$

et donc $b = 3^n - 3\times n \times 3^{n-1} = 3^n(1-n)$

4) Ainsi $A^n = (A^2 - 6A + 9)\,Q(A) + n3^{n-1}A + 3^n(1-n)I_2$

soit $A^n = n3^{n-1}A + 3^n(1-n)I_2$

Exercice 3 1°) $f_n(x) = 1 - 2x^3 + \frac{3}{n} x(x-1)$

$f_n'(x) = -6x^2 + \frac{3}{n}(2x-1) = -6x^2 + \frac{6}{n}x - \frac{3}{n}$

$\Delta = \frac{36}{n^2} - \frac{72}{n} = \frac{36}{n}\left(\frac{1}{n} - 2\right)$ négatif. donc $f_n' \leq 0$

f_n est décroissante sur $[0;1]$ avec $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$

$\to$ TVI $\quad f_n(u_n) = 0$

2°) $f_n(u_{n+1}) = 1 - 2u_{n+1}^3 + \frac{3}{n} u_{n+1}(u_{n+1} - 1)$

or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1 - 2u_{n+1}^3 + \frac{3}{n+1} u_{n+1}(u_{n+1} - 1) = 0$

d'où $f_n(u_{n+1}) = \left(\frac{3}{n} - \frac{3}{n+1}\right) u_{n+1}(u_{n+1} - 1) = \frac{3}{n(n+1)} u_{n+1}(u_{n+1} - 1)$

3°) $\forall n \quad u_n \in [0;1]$ donc $f_n(u_{n+1}) < 0$

donc $u_{n+1} > u_n$ puisque f_n est décroissante

4°) (u_n) est croissante donc converge (majorée par 1)

5°) $f_n(u_n) = 0$ si $n \to +\infty$ $\lim \frac{3x(x-1)}{n} = 0$ (par encadrement)

et donc $1 - 2\ell^3 = 0$ soit $\ell = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

Exercice 4 $\quad P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ (on suppose P non nul)

1.2) $\deg P(X^2) = 2\deg P(X) = 2 + \deg P(X)$ d'où $\deg P(X) = 2$

3) avec $P(X) = aX^2 + bX + c$

il vient $aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)(aX^2 + bX + c)$

$= aX^4 + bX^3 + cX^2 + aX^2 + bX + c$

soit $a \in \mathbb{R}^*$

$b = 0$

$a + c = 0$ d'où $c = -a$

$\boxed{P(X) = a(X^2 - 1)}$