

Semaine 10 - Sujet A

Cours $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ si $-1 < q < 1$ et $q \neq 0$

application $\frac{1}{1-q} = 4 \Leftrightarrow 1-q = \frac{1}{4} \Leftrightarrow q = \frac{3}{4}$

Exercice 1

$$A = \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{2^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4$$

$$B = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^n} = -1 + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n} = -1 + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Exercice 2 1°) $\frac{2k^2}{k^3-1} - \frac{1}{k} = \frac{2k^3 - (k^3-1)}{k(k^3-1)} = \frac{k^3+1}{k(k^3-1)} > 0$ si $k \geq 2$

2°) la série harmonique $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge donc par comparaison S diverge

Exercice 3 1°) $\varphi(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \left(-1 + 4\left(\frac{x}{2}\right)\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = +\infty$ par produit

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ par somme

2°) somme de fonctions dérivables $\varphi'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x-1}{x^2}$ d'où par de $(2x-1)$

3°)

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
φ'		-	0	+
φ	$+\infty$		$2-4\ln 2$	$+\infty$

4°) $\ln 2 \approx 0,7$ donc $2-4\ln 2 < 0$
double TVI sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, +\infty[$

Exercice 4 si $k \geq 1$ alors $k^3 \geq 1$ donc $k^3 e^k \geq e^k$ et $\frac{1}{k^3 e^k} \leq \frac{1}{e^k}$

1°) donc $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3 e^k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{e^k}$

2°) $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^3 e^{n+1}} > 0$ donc S_n est croissante

et majorée par $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$

donc (S_n) converge (convergence monotone)

Semaine 10. Sujet B

Cours $\sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ si $-1 < q < 1$ (et $q \neq 0$)

application: $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n}{2^n} = \left(\sum_{n \geq 1} n \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{2}{9}$

Exercice 1

$$A = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{4^n} = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} n \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{4}{9}$$

$$B = \sum_{n \geq 2} n(n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 2} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 4$$

$$C = \sum_{n \geq 0} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Exercice 2

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 5$$

x	$-\infty$	0	1	5	$+\infty$
f'	-	0	+	0	+
f	$+\infty$	-5	-2	-130	$+\infty$

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 20x$$

$$f'(x) = 4x(x^2 - 6x + 5)$$

$$f'(x) = 4x(x-1)(x-5)$$

2/3/4) TVI sur 4 intervalles

$$f(x) = \alpha$$

- si $\alpha < -130$ pas de solution • si $\alpha = -130$ 1 solution • si $-130 < \alpha < -5$ 2 sol.
- si $\alpha = -5$ 3 sol. • si $-5 < \alpha < -2$ 4 sol. ; si $\alpha = -2$ 3 sol. ; si $\alpha > -2$ 2 sol.

Exercice 3 ① $f(x) = \ln(1+x) - x$ $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$

f est décroissante et $f(0) = 0$ donc f est négative et $x \geq \ln(1+x)$

avec $x = \frac{1}{k}$ il vient $\frac{1}{k} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$

② $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1)$ (téléscopage)

donc $\ln(n+1) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ par co-propriété.

Exercice 4

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$$

d'où $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$

Semaine 10. sujet C

Cours: $(e^u)' = u' e^u$

application: si $e^u = x$ c'est que $u(x) = \ln x$

en dérivant il vient $(x)' = u'(x) \times x$

soit $u'(x) = \frac{1}{x}$ on retrouve la dérivée de $\ln x$

Exercice 1 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$

d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

$f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$ $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$ donc f est strictement croissante.

Exercice 2 $u_0 > 0$ $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

1°) récurrence immédiate: $\forall n, u_n > 0$

2°) $u_{n+1} - u_n = u_n (e^{-u_n} - 1) < 0$ car $e^{-u_n} < e^0 = 1$

3°) Convergence monotone (décroissante minorée par 0)
et $l = l e^{-l}$ soit $\begin{cases} e^{-l} = 1 \\ l = 0 \end{cases}$ d'où $l = 0$

4°) $v_n = \ln(u_n)$

a) $v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(u_n) + \ln(e^{-u_n}) - \ln(u_n) = -u_n$

b) $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1} = \ln(u_0) - \ln(u_{n+1})$

c) comme $\lim(u_n) = 0$, il vient $\lim(-\ln(v_{n+1})) = +\infty$
donc la série $\sum u_k$ diverge

Exercice 3

1°) si $n \geq 2$ $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n^2}$

2°) d'où $1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \leq S_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$

soit $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{n}$

3° à 5°) S_n est croissante ($S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2}$) et majorée par 2 donc cv.

6°) par encadrement $\frac{3}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$