Exercice 1. *Fonctions hyperboliques.*
On définit deux fonctions sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

connues sous les noms respectifs de *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique.*

1. Étudier la parité des fonctions f et g.

2. Démontrer l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 - g(x)^2 = 1$$

3. Montrer que les fonctions f et g sont dérivables, et calculer leurs fonctions dérivées.

4. Dresser le tableau de variations de g, en plaçant $g(0)$ dans ce tableau.
En déduire le tableau de signes de $g(x)$.

5. Donner le tableau de variations de f.

6. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > g(x)$$

7. Montrer que la fonction f est convexe.

Exercice 2. *D'après ECRICOME 2023.*
Partie A : Étude d'une matrice

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices A^2 et A^3, puis vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$A^n = a_n A^2 + b_n A$$

vérifiant pour tout entier naturel non nul $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

(b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$a_n = (n-1)2^{n-2}$$

(c) En déduire l'expression de b_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n+1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n+1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Partie B : Graphes

Soient p un entier non nul et G un graphe **orienté** à p sommets. On note $s_0, s_1, s_2, ..., s_{p-1}$ les sommets de G.

5. Soit $M = (m_{i,j})_{i,j}$ la matrice d'adjacence du graphe G. Rappeler comment son coefficient $m_{i,j}$ est défini.

6. Soit n un entier naturel non nul.
Rappeler sans justification l'interprétation du coefficient situé à la ligne i et la colonne j dans la matrice M^n.

7. Dans cette question uniquement, on suppose que $p=4$ et que la matrice d'adjacence du graphe G est la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

étudiée dans la partie **A**.

(a) Représenter les sommets et arêtes du graphe G sous forme d'un diagramme. *Dessiner le graphe.*

(b) Le graphe G est-il connexe ? Justifier votre réponse.

(c) Soit n un entier naturel non nul.
Déterminer le nombre de chemins de longueur n menant du sommet s_3 au sommet s_0.

Problème.

Partie A : Étude d'une fonction.

1. Justifier que l'équation $1+x+x^2=0$ ne possède aucune solution réelle.

2. On considère à présent la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{x}{1+x+x^2}$$

(a) Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

(b) Dresser le tableau de variations de f.

(c) Justifier que f est monotone sur l'intervalle $[0,1]$.

Partie B : Étude d'une suite.

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_1=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n+u_n^2}$$

3. Vérifier que

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}$$

et en déduire que

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n+1}$$

4. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$0\leq u_n\leq\frac{1}{n}$$

5. En déduire la convergence et la limite de la suite (u_n).

6. Créer un script Python afin de calculer la valeur de u_n pour un entier n donné par l'utilisateur :

Partie C : Étude d'une série.

7. Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)-x+\frac{1}{2}x^2=\frac{x^2(x^2-x-1)}{2(x^2+x+1)}$$

8. En déduire que

$$\forall x\in[0,1], f(x)\leq x-\frac{1}{2}x^2$$

puis que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n^2\leq 2\left(u_n-u_{n+1}\right)$$

9. Simplifier la série

$$\sum_{k=1}^{n}u_k-u_{k+1}$$

10. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que la série $\sum u_k^2$ converge.

Étudier le sens de variation de $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k^2$ *dans un premier temps.*

11. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty}u_k^2\leq 2$.