*Ce devoir est à traiter durant mon absence le 7 mars.
Je vous demande de le traiter individuellement, dans une durée limitée de 2 heures.*

Exercice 1. *Inspiré par ECRICOME 2022.*

Partie A : Calcul matriciel.

On considère les matrices $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = I_3 - A$.

1. Expliciter la matrice B .
2. Calculer les matrices $A \times B$ et $B \times A$.
3. Vérifier par le calcul que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

Partie B : Résolution d'une équation matricielle.

Dans cette partie, on cherche à déterminer les matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, avec a, b des nombres réels, vérifiant

$M^2 = M$. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble solution.

4. Justifier que les matrices A et B de la partie **A** sont solutions.
5. Montrer qu'une matrice M est solution si et seulement si

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

6. En déduire que les solutions recherchées sont $\mathcal{S} = \left\{ 0_3 ; I_3 ; A ; B \right\}$.

Exercice 2. *Fonctions hyperboliques.*

On définit deux fonctions sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

connues sous les noms respectifs de *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*.

1. Étudier la parité des fonctions f et g .
2. Démontrer l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 - g(x)^2 = 1$$

3. Montrer que les fonctions f et g sont dérivables, et calculer leurs fonctions dérivées.
4. Dresser le tableau de variations de g , en plaçant $g(0)$ dans ce tableau.
En déduire le tableau de signes de $g(x)$.
5. Donner le tableau de variations de f .
6. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > g(x)$$

7. Montrer que la fonction f est convexe.

Problème.**Partie A : Étude d'une fonction.**

- Justifier que l'équation $1 + x + x^2 = 0$ ne possède aucune solution réelle.
- On considère à présent la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{1 + x + x^2}$$

- Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
- Dresser le tableau de variations de f .
- Justifier que f est monotone sur l'intervalle $[0, 1]$.

Partie B : Étude d'une suite.

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n + u_n^2}$$

- Vérifier que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n + 1 + \frac{1}{n}}$$

et en déduire que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n + 1}$$

- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

- En déduire la convergence et la limite de la suite (u_n) .
- Compléter le script suivant afin de calculer la valeur de u_n pour un entier n donné par l'utilisateur :

```
n = int.input('Entrez n')
u= ...
for ...
    u= ...
print(u)
```

Partie C : Étude d'une série.

- Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{x^2(x^2 - x - 1)}{2(x^2 + x + 1)}$$

- En déduire que

$$\forall x \in [0, 1], f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$$

- Simplifier la série

$$\sum_{k=1}^n u_k - u_{k+1}$$

- Nous admettons que la série $\sum u_k^2$ converge.

En utilisant la question précédente, montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2 \leq 2$.