Sujet de colle A

Semaine 12

Question de cours :

À quelle condition une fonction de classe C^2 est-elle convexe ?

Application : Étudier la convexité de la fonction définie par $f(x)=(\ln(x))^2$ pour x > 0.

Exercice 1

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=2\sqrt{x}e^{-x}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et vérifier que $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{e}}$.
2. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$
3. Calculer $f'(x)$ pour x > 0.
4. Dresser le tableau de variations complet de la fonction *f*.
5. Étudier la convexité et déterminer les points d'inflextion de la courbe représentative de *f*.

Exercice 2

On lance une pièce équilibrée indéfiniment. Pour $n\geq 2$ on note l'événement :

P_n : "Le n-ième lancer donne pile " , F_n : "Le n-ième lancer donne face "

et A_n : " Pile est obtenu pour la deuxième fois au n-ième lancer"

1. Exprimer les événements A_2 et A_3 en fonction des P_n , F_n, et calculer leurs probabilités en justifiant.
2. Calculer la probabilité de l'événement A_4 sans justification.
3. Exprimer l'événement A_n en fonction des P_n , F_n . *On poura adopter une écriture en extension claire.*
4. Calculer la probabilité de l'événement A_n .

Exercice 3

On considère trois urnes :

- U_1 contient 2 boules rouges et une boule verte.
- U_2 contient 2 boules vertes et une boule noire.
- U_3 contient 2 boules noires et une boule rouge.

On tire au hasard une boule dans l'urne U_1 qu'on met dans U_2. Ensuite, on tire une boule dans l'urne U_2 qu'on met dans U_3. Enfin, on tire une boule dans l'urne U_3 qu'on met dans l'urne U_1.

1. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit verte ? Noire ? Rouge ?
2. Quelle est la probabilité que la dernière boule tirée soit verte ? Noire ? Rouge ?
3. Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient de la même couleur ?

4. Optionnel, très long :

Quelle est la probabilité qu'à l'issue des trois tirages, la composition de la première urne soit inchangée ?

<u>**Sujet de colle B**</u>

Semaine 12

Question de cours :

Énoncer la formule de Poincaré permettant de calculer $P(A\cup B\cup C)$.

Que devient-elle lorsque A, B et C sont deux à deux incompatibles ?

Exercice 1 *D'après EM Lyon 2012*

On considère la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $[0\ ;+\infty[$.

2. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0\ ;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout x >0.

3. Dresser le tableau des variations de f . On précisera la limite de *f* en $+\infty$.

4. Montrer que la fonction f est convexe sur]0; +1[.

5. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et en déduire que la courbe représentative de f possède une tangente verticale en 0

6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f à main levée. *On admettra que* $e^{-1}\simeq 0{,}37$

Exercice 2

On considère une urne contenant trois boules : une rouge, une verte et une bleue.

On effectue une série illimitée de tirages avec remise dans cette urne, et on définit les événements :

R_n *: "la boule rouge n'a pas été obtenue au cours des n premiers tirages"*

V_n *: "la boule verte n'a pas été obtenue au cours des n premiers tirages"*

B_n *: "la boule bleue n'a pas été obtenue au cours des n premiers tirages"*

et E_n *: "chaque couleur a été obtenue au moins 1 fois au cours des n premier tirages"*

1. **Dans cette question uniquement**, on suppose qu'on effectue n=3 tirages.
   Calculer $P(R_3)$, $P(V_3)$, $P(B_3)$ puis la probabilité $P(E_3)$

2. Calculer $P(R_n)$, $P(R_n\cap V_n)$ et $P(R_n\cap V_n\cap B_n)$ de manière générale.

3. Justifier brièvement l'égalité $E_n=\overline{R_n\cup V_n\cup B}$.

4. En déduire la probabilité $P(E_n)$.

Exercice 3

On tire à trois reprises, et de façon indépendante et équiprobable, un nombre parmi 1, 2 et 3.

Calculer les probabilités des événements suivants :

A : " On tire trois fois le nombre 1 "

B : " Les trois nombres sont identiques "

C : " Les nombres forment une suite décroissante."

D : " Le plus grand nombre tiré vaut 2 "

Sujet de colle C (plus difficile)

Semaine 12

Question de cours :

Pour une fonction de classe C^1, comment se traduit la convexité géométriquement (sur la courbe) ?

Application : En calculant une tangente à courbe représentative de $f(x)=(1+x)^n$, montrer *l'inégalité de Bernoulli*

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad .$$

Exercice 1

Soit a>0. On considère la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$.

1. Montrer que $f(\sqrt{a})=\sqrt{a}$.

2. Justifier que f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

3. Dresser le tableau de variations, et justifier que sur $]0\ ;+\infty[$, on a $f(x)\geq\sqrt{a}$.

4. Justifier que , pour $x\geq\sqrt{a}$, on a $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$.

5. On considère une suite définie par $u_0 \geq\sqrt{a}$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n \geq\sqrt{a}$.

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\sqrt{a}| \leq\frac{1}{2} |u_n-\sqrt{a}|$

c) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\sqrt{a}|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0 -\sqrt{a}|$

d) En déduire que la suite (u_n) converge, et donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2

On dispose de deux pièces d'apparence identique :

La pièce A est équilibrée, et la pièce B donne pile avec une certaine probabilité $p\in]0\ ;1[$

Pour le premier lancer du jeu, on choisit une pièce au hasard et pour les coups suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient pile, on garde la pièce pour le lancer suivant et si on obtient face, on change de pièce pour le lancer suivant. On note, pour tout entier k non nul *A_k : « le k-ième lancer se fait avec la pièce A »* et *$a_k = P(A_k)$*

1. Déterminer les probabilités $a_1 = P(A_1)$, $a_2 = P(A_2)$ et $a_3 = P(A_3)$ en fonction de p.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=(p-\frac{1}{2})a_n+1-p$.

3. a) Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

b) Exprimer a_n en fonction de n. *On pourra chercher un peu avant de demander une indication au colleur.*

4. Calculer et interpréter $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_k)$ en fonction de la valeur prise par p.

5. Pour quelle valeur de p a-t-on $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_k)=\frac{1}{2}$? Expliquer en quoi c'est normal.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul. Étudier la convexité et les points d'inflexion de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x)=x^{n+2}+x^{n+1}+1$$

Sujet de colle Spécial Khalil

Semaine 12

Question de cours :

Définir la convexité d'une fonction. *En toute généralité, sans hypothèse de dérivabilité.*

Application : Soit f une fonction convexe sur [a,b] telle que f(a) = f(b) = 0. Montrer que f est positive sur [a,b].

Exercice 1

On rappelle que la concavité d'une fonction *f* se formalise par

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, \forall t\in[0,1], f(ta+(1-t)b)\geq t f(a)+(1-t) f(b)$$

1. Démontrer la concavité de la fonction ln sur $]0,+\infty[$.

2. En déduire que $\forall a>0, \forall b>0, \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$

3. Démontrer *l'inégalité arithmético-géométrique* : $\forall a>0, \forall b>0, \sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$

4. En déduire le résultat suivant : si x>0 et y>0 , alors $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

Exercice 2

Un sauteur de haies franchit des haies successives. Il enjambe la première haie avec 100% chances, la deuxième haie avec 1 chance sur 2 , la troisième haie avec 1 chance sur 3 , la 4^e haie avec 1 chance sur 4 etc. Il est éliminé à son premier échec.

Pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$, on note les événements : H_n : « Le sauteur enjambe la n-ième haie »

et E_n : « Le joueur est éliminé à la n-ième haie »

1. Calculer P(H_1) , P(E_1) , P(H_2) , P(E_2) , P(H_3) et P(E_3).

2. De manière générale, combien vaut P(H_n) ?

3. Exprimer E_n en fonction de H_1 , H_2 , H_3 , … , H_n et en déduire que $P(E_n)=\frac{n-1}{n!}$

4. Calculer $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)$ et interpréter cette probabilité.

Exercice 3

Soit $n\geq 2$ et f_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f_n(x)=x^{n-1}\ln(x)$.

1. Calculer f_n' .

2. Montrer que $f_n^{(n)}=(n-1)f_{n-1}^{(n-1)}$

3. En déduire l'expression de $f_n^{(n)}$

Exercice 4

On effectue une infinité de lancers d'une pièce produisant FACE avec une certaine probabilité $p\in]0,1[$.

On note A_n : *« Au cours des n premiers lancers, FACE n'est jamais suivi de PILE »* pour $n\geq 2$.

Calculer $P(A_2)$, $P(A_3)$, puis montrer que $P(A_n)=\begin{cases}\frac{p^{n+1}-(1-p)^{n+1}}{2p-1} & \text{si } p\neq\frac{1}{2}\\ \frac{n+1}{2^n} & \text{si } p=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Question supplémentaire pour Khalil : En raisonnant par récurrence, montrer que pour toute suite de valeurs (x_n) strictement positives on a

$$\ln\left(\frac{x_1+...+x_n}{n}\right)\geq\frac{\ln(x_1)+...+\ln(x_n)}{n}$$

et en déduire *l'inégalité arithmético-géométrique généralisée* $(x_1...x_n)^{\frac{1}{n}}\leq\frac{x_1+...+x_n}{n}$