Sujet de colle A

Semaine 14

Question de cours :

Définir l'indépendance *deux à deux* d'une suite d'événements $(E_0, E_1, E_2, \dots)$

Exercice 1

1. On considère la fonction définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $g(x) = \frac{x}{x+1}$

a) Justifier que $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ lorsque $x \neq -1$

b) En déduire une primitive de la fonction g .

3. En s'inspirant de la question 1, déterminer une primitive de la fonction $h(x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance un dé équilibré à six faces n fois de suite. On considère l'évènement :

A_n : « Les nombres 1, 2 et 3 apparaissent tous au moins une fois lors des n lancers »

On pose $p_n = P(A_n)$. Pour tout nombre entier $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose :

B_i : « Le numéro i n'apparaît pas durant les n tirages »

1. Calculer les probabilités $P(B_1)$, $P(B_1 \cap B_2)$ et $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$.

2. En déduire la probabilité $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$.

3. En déduire que $p_n = 1 - 3\left(\frac{5}{6}\right)^n + 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ et interpréter cette limite.

Exercice 3

Pour chaque entier naturel n , on considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .

2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$.

3. Etudier le sens de variation de la suite (I_n) . Que peut-on en déduire ?

4. a) À l'aide d'une étude de fonction, justifier que pour tout $x \in [0, 1]$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

b) En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$, et donner la limite de (I_n) .

Exercice 4

1. Justifier que $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$ pour tout réel $u \geq 0$

2. Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$ à l'aide du changement de variable $u = e^x$

Sujet de colle B

Semaine 14

Question de cours :

Donner les formules permettant de primitiver $u' \times u^n$, $\frac{u'}{u}$ et $u' e^u$

où u représente une fonction dérivable ne s'annulant pas.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n , on définit $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1. Calculer l'intégrale I_0

2. Encadrer e^t pour $t \in [0, 1]$, et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, I_k = I_{k-1} - \frac{1}{k!}$

4. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^n I_k - I_{k-1}$, et déduire de la question précédente que $I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

5. Conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) = e$

Exercice 2

On considère une particule se déposant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B, C d'un triangle selon le procédé suivant :

- si la particule se trouve en B, elle y reste.
- si la particule se trouve en A, elle se trouve à la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable.
- si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois, et elle va en B sept fois plus souvent qu'en A.
- à la première seconde, elle se pose au hasard sur l'un des trois sommets.

Pour tout $n \geq 1$, on note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement :

« À la n -ième seconde, la particule se trouve en A (resp. B, C) »

On note a_n, b_n, c_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n .

1. Que valent a_1, b_1, c_1 ? Calculer a_2, b_2 et c_2 .
2. Donner une relation de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n .
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}$

Indication : On pourra d'abord montrer que (c_n) est récurrente linéaire d'ordre 2.

4. Étudier la convergence des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$. Interpréter.

Exercice 3

Calculer l'intégrale $I = \int_1^e t^2 \ln(t) dt$ de deux manières :

- À l'aide d'une intégration par parties.
- À l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$

Sujet de colle C (plus difficile)

Semaine 14

Question de cours :

Donner la formule d'intégration par parties.

Exercice 1 (Application de la question de cours)

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales

$$A = \int_0^1 t e^t dt \quad , \quad B = \int_0^1 t^3 e^{t^2} dt \quad \text{et} \quad C = \int_1^2 t^2 \ln(t) dt$$

2. Effectuer le changement de variable $u = t^2$ dans l'intégrale B pour retrouver sa valeur d'une autre façon.

Exercice 2

Pour chaque entier naturel n , on considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n} dx$.

1. Calculer I_0 , I_1 et I_2 . L'intégrale I_1 pourra nécessiter une indication.

2. Donner un encadrement de $\frac{x}{1+x^n}$ pour $x \in [0,1]$ et en déduire un encadrement de I_n .

3. Étudier le sens de variation de la suite (I_n) . Que peut-on en déduire ?

4. Justifier que $\int_0^1 x(1-x^n) dx \leq I_n \leq \int_0^1 x dx$ et en déduire la limite de (I_n) .

Exercice 3

On lance une pièce équilibrée de manière répétée, et on note les événements :

P_k : « Le k -ième lancer a produit PILE », F_k : « Le k -ième lancer a produit FACE »,

E_k : « Au k -ième lancer, on a obtenu PILE pour la deuxième fois » et $e_k = P(E_k)$

1. Décrire les événements E_2 , E_3 et E_4 à l'aide des événements $\{P_k\}$ et $\{F_k\}$ et calculer leurs probabilités.

2. De manière générale, exprimer E_n à l'aide des événements $\{P_k\}$ et $\{F_k\}$ (adopter une écriture en extension claire) et calculer sa probabilité.

3. On considère la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (x-1) \left(\frac{1}{2}\right)^x$

a) Étudier les variations de la fonction f . On pourra réécrire $\frac{1}{2} = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ et admettre $\frac{\ln(2)}{1+\ln(2)} \simeq 2,4$

b) Si l'on souhaite obtenir PILE pour la deuxième fois, quel nombre de lancers est le plus probable ?

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ Calculer l'intégrale $I_n = \int_1^e t^n \ln(t) dt$ de deux manières :

- À l'aide d'une intégration par parties.
- À l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$

Sujet de colle Spécial Khalil

Semaine 14

Question de cours :

Rappeler quel type de fonction admet automatiquement une primitive.

Est-ce que cette primitive est unique ?

Application : Soit $a > 0$ fixé (constant). On considère la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(ax)$.

1. Dériver la fonction f sans utiliser les propriétés de la fonction $\ln$.
2. En déduire que $f(x) = \ln(x) + k$ où k est une constante qu'on déterminera.

Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$

1. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g est impaire.
2. Justifier que g est de classe C^1 et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de g . On précisera $g(0)$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
5. Montrer que pour tout $x > 0$, $x e^{-4x^2} \leq g(x) \leq x e^{-x^2}$. En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

Exercice 2

Deux escargots A et B font la course sur une feuille de salade infinie.

On sait que si A est en tête au centimètre n , il le sera à nouveau au centimètre $n + 1$ avec une probabilité a , et si B est en tête au centimètre n , il le sera à nouveau au centimètre $n + 1$ avec une probabilité b .

On suppose de plus que l'escargot A est en tête au centimètre 1 et qu'il n'y a jamais égalité au bout d'un nombre entier de centimètres.

On note : A_n : "L'escargot A est en tête au centimètre n ", B_n : "L'escargot B est en tête au centimètre n " et $p_n = P(A_n)$

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n , a et b .
2. Calculer et interpréter $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$
3. Quelle est la probabilité que l'escargot A reste toujours en tête ?
4. Donner la probabilité des événements : E_n : "L'escargot B prend la tête au centimètre n "
et F_n : "L'escargot B prend la tête au centimètre n et reste toujours en tête" en les décrivant à l'aide des $\{A_n\}$ et $\{B_n\}$
5. Quelle est la probabilité que l'escargot B finisse par définitivement prendre la tête ?

Exercice 3

On considère l'intégrale $I = \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

1. Trouver deux nombres a et b tels que pour tout réel u (différent de 1 et -1) on a : $\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{a}{u - 1} + \frac{b}{u + 1}$
2. Calculer l'intégrale I à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{e^x + 1}$.