Feuille d'exercices 21 : Intégration

Exercice 1. *Recherche de primitives.*

1. Déterminer des réels a et b de sorte que $F(x) = (ax+b)e^{2x}$ définisse une primitive de la fonction $f(x) = xe^{2x}$.
2. Trouver une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x^2e^x$.
   On cherchera une fonction de la forme $F(x) = (ax^2+bx+c)e^x$

Exercice 2. *Calcul de primitives plus difficile.*
Pour chacune des fonctions suivantes, donner les intervalle où elles admettent des primitives, et calculer ces primitives :

$$f_1(x) = \frac{x}{x+1} \text{ ; } f_2(x) = x\sqrt{3-x} \text{ ; } f_3(x) = \frac{3}{x(x-1)} \text{ ; } f_4(t) = \frac{1}{t\ln(t)}$$

Exercice 3. *Calcul d'intégrales.*
Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_2^5 (-10t^4+4t^3-5t+4)\,dt \qquad I_2 = \int_{-1}^1 \left(t^3-t^2+\frac{t}{2}-1\right)dt \qquad I_3 = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (-t^3-t^2+1)\,dt$$

$$I_4 = \int_0^x (t^2+xt+x^2)\,dt \qquad I_5 = \int_x^{x^2} (t^3-2xt^2+x^2t-1)\,dt \qquad I_6 = \int_2^1 \frac{\ln x}{x}dx \qquad I_7 = \int_2^4 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

$$I_8 = \int_0^1 \frac{2t^2}{\sqrt{1+5t^3}}dt \qquad I_9 = \int_0^{\ln(5)} \frac{e^t}{e^t+1}dt \qquad I_{10} = \int_0^{-3} te^{t^2}dt \qquad I_{11} = \int_{-4}^2 |x|dx$$

$$I_{12} = \int_{-1}^3 |x^2-3x+2|dx \qquad I_{13} = \int_{-1}^2 |2x^2+3x+1|dx$$

Exercice 4. *Intégration par parties.*
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$$\mathrm{A} = \int_0^1 te^t\,dt \quad \mathrm{B} = \int_1^e v^2\ln(v)\,dv \quad \mathrm{C} = \int_1^e x(\ln(x))^2\,dx \quad \mathrm{D} = \int_0^1 u^3e^{u^2}\,du$$

Exercice 5. *Encadrement d'une intégrale.*

1. Soit k un entier non nul.
   (a) Donner un encadrement de $\frac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$.
   (b) En déduire un encadrement de l'intégrale $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt$.
2. Déduire de la question ***1.*** que
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$
3. Donner une minoration de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, en déduire la divergence de $\sum \frac{1}{k}$

Exercice 6. *Majoration et limite d'une intégrale à paramètre.*

1. Dresser les tableau de variations de la fonction $f(x) = \ln(1+x) - x$ sur $[0, +\infty[$.
2. En déduire que $\forall x \in [0, +\infty[\ ,\ 0 \leq \ln(1+x) \leq x$.
3. Pour tout entier n, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.
   Utiliser la question ***2.*** pour encadrer I_n .
4. En déduire la limite de la suite (I_n) .

Exercice 7. *Calcul et limite d'une intégrale à paramètre.*
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.
   Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite.
3. Intégrer par parties I_{n+1} et l'exprimer en fonction de I_n .
4. En déduire l'expression de I_n en fonction de n, et retrouver sa limite.

Exercice 8.
Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$.

1. Donner un encadrement de $t^n e^{-t}$ pour $t \in [0,1]$, et en déduire la limite de (I_n).
2. Calculer I_0 puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{e(n+1)!}$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = 1 - \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$.

Exercice 9.
Calculer les intégrales suivantes, en utilisant les changements de variable proposés.

$$I_1 = \int_0^1 t\sqrt{3t^2+1}\,dt \text{ avec } u(t) = 3t^2+1$$

$$I_2 = \int_1^2 \frac{t}{(t^2+1)(t^2+2)}\,dt \text{ avec } u(t) = t^2$$

$$I_3 = \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)} \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) dt \text{ avec } u(t) = \frac{t}{t+1}$$

Exercice 10.
Justifier que la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2+4x-3 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ -5x+2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ est continue par morceaux et calculer $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$.

Exercice 11.
On considère l'intégrale $I = \int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

1. Trouver deux nombres a et b tels que pour tout réel u (différent de 1 et -1) on a :

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1}$$

2. En déduire une primitive de la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^2-1}$ sur $]1,+\infty[$, puis calculer I à l'aide du changement de variable $u(x) = \sqrt{e^x+1}$.

Exercice 12.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$

1. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g est impaire.
2. Justifier que g est de classe C^1 et que pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de g. On précisera g(0).
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
5. Montrer que pour tout $x > 0, xe^{-4x^2} \leq g(x) \leq xe^{-x^2}$
   En déduire la limite de la fonction g en$+\infty$.

Exercice 13.
Calculer les limites des sommes suivantes :

$$U_n = n^{-\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k},\; V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \text{ et } W_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{2+\left(\frac{k}{n}\right)^3}}$$

Exercice 14. *D'après EDHEC 2005.*
Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^n}\,dx$

1. Calculer I_0 et I_1. On conviendra que $x^0 = 1$
2. En calculant $I_{n+1} - I_n$, justifier que la suite (I_n) est croissante.
3. (a) Justifier que pour $x \in [0,1]$, on a $\frac{1}{1+x+x^n} \leq \frac{1}{1+x}$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq \ln(2)$.
4. Justifier que la suite (I_n) est convergente.
5. (a) Vérifier que $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(2)$.
   (b) Écrire $\ln(2) - I_n$ comme une seule intégrale, et en déduire que $\ln(2) - I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   (c) Justifier que $0 \leq \ln(2) - I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 15. *D'après ECRICOME 2004.*
Pour tout entier naturel n, on considère $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

On convient par ailleurs que $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

1. Calculer l'intégrale u_1.
2. Justifier que pour tout réel $x \in [0,1]$, on a $0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
4. Justifier que la suite (u_n) converge et donner sa limite.