Feuille d'exercices 22 : Variables aléatoires (1^e Partie)

Exercice 1.
On considère un dé équilibré, que l'on lance 3 fois. Soit X le nombre de 6 obtenus.

1. Donner Ω et $X(\Omega)$.

2. En s'aidant éventuellement d'un arbre, déterminer la loi de probabilité de X.

3. Calculer l'espérance E(X).

Exercice 2.
Jean propose à Jeanne de lancer un dé à 10 faces légèrement truqué, dont la loi est :

issue	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$

Ils jouent alors au jeu suivant : Jeanne gagne 3 euros si le dé tombe sur le chiffre 0, elle gagne 7 euros si le dé tombe sur le chiffre 9, elle gagne 1 euro si le dé tombe sur le chiffre 1 ou 8, elle perd 2 euros si le dé tombe sur le chiffre 2 ou 6, elle perd 1 euro si le dé tombe sur le chiffre 4 ou 5, et elle perd 5 euros si le dé tombe sur le chiffre 3 ou 7. On note X la variable aléatoire donnant le gain de Jeanne.

1. Déterminer le support et la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 3. *Probabilités et variables aléatoires.*
Un tricheur possède 2 pièces, dont une (truquée) possède deux cotés « Pile ». Un prend une pièce au hasard et la lance. On note les événements :

T : « La pièce choisie est truquée » et P : « La pièce choisie donne Pile »

Partie A : Un seul lancer.

1. Quelle est la probabilité que la pièce choisie soit truquée ?

2. Quand la pièce est truquée, quelle est la probabilité qu'elle donne « Pile » ?

3. Quelle est la probabilité de choisir une pièce non truquée puis d'obtenir « Pile » ?

4. Quelle est la probabilité d'obtenir « Pile ».

5. Le tricheur a obtenu « Pile ». Donner la probabilité que ce soit avec la pièce truquée.

Partie B : Un pari.
Le tricheur parie qu'il va obtenir « Pile ».
— S'il obtient effectivement « Pile », il gagne x euros , où x est un certain montant.
— Sinon, il perd 1 euro.
On note G la variable aléatoire égale à son gain algébrique.

6. Quelle est la loi de G ? Calculer son espérance.

7. Quelle valeur doit prendre x pour que le jeu demeure honnête malgré la présence de la pièce truquée ?

Partie C : Succession de lancers.
On décide de lancer la pièce choisie de façon répétée avec la règle suivante :
— Si on obtient « Pile », on garde la pièce.
— Si on obtient « Face », on change de pièce.
On rappelle qu'au premier lancer, la pièce est choisie au hasard. On note l'événement

T_n : « Le n-ième lancer s'effectue avec la pièce truquée. »

et p_n la probabilité de l'événement T_n.

8. Donner p_1 et p_2.

9. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
Indication : On pourra utiliser la formule des probabilités totales ou un arbre convenable.

10. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

11. Calculer. Interpréter le résultat.

12. Quelle est la probabilité que le 10^e lancer s'effectue avec la pièce truquée ?

Feuille d'exercices 22 : Variables aléatoires (1^e Partie)

Exercice 4.
Soit X la v.a. dont la loi est donnée par

x_i	-2	-1	1	2	4
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

1. Donner le support $X(\Omega)$.

2. Vérifier que le tableau définit bien une loi de probabilité.

3. Déterminer et tracer sa fonction de répartition.

4. Déterminer la loi de X^2.

5. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 5.
Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6.

1. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que :
$P(X = 3) = P(X = 4)$, $P(X < 5) = \frac{1}{3}$ et $P(X > 5) = \frac{1}{4}$.

2. Calculer l'espérance E(X), le moment d'ordre 2 $E(X^2)$ puis la variance V(X).

Exercice 6.
Le coût de production d'un objet est de 950 euros. Cet objet peut présenter le défaut A, le défaut B, ou les deux défauts en même temps. La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabriquant avec les coûts suivants : 100 euros pour le défaut A, et 150 euros pour le défaut B. On admet que 90% des objets produits n'ont aucun défaut, 4% ont le seul défaut A, 2% ont le seul défaut B, et les autres ont les deux défauts A et B.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient, c'est-à-dire le coût de production augmenté du coût de réparation éventuel. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer l'espérance mathématique E(X). Que représente-t-elle pour l'usine ?

3. On admet que tous les objets produits sont vendus. L'usine peut-elle espérer réaliser des bénéfices en vendant 960 euros chaque objet produit ?

Exercice 7.
On pioche successivement deux boules, sans remise, dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5. On note X la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus. Donner la loi de X puis calculer E(X) et V (X).
Indication : On pourra calculer les probabilités $P(X \leq 2), P(X \leq 3), P(X \leq 4)$

Exercice 8.
Une urne contient 1 boule bleue et 3 boules jaunes. On tire les boules au hasard jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des boules d'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires.

1. Quel est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X ?

2. Déterminer la loi de X.

3. Justifier l'existence de l'espérance de X, et la calculer.

4. Calculer V(X) et σ(X).

Exercice 9.
Une urne contient 2 boules blanches et n $-$ 2 boules rouges. On effectue des tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, Y le nombre de boules rouges restantes à ce moment dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.

2. Exprimer Y en fonction de X et calculer E(Y).

Exercice 10.
Soit a un nombre réel et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{a}{2^k k!}$$

1. Déterminer a pour que l'on définisse bien ainsi une loi de probabilité.
Dans toute la suite de l'exercice, on considérera que a prend cette valeur.

2. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 11.
On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. à chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est égale à $2/3$ tandis que celle d'obtenir face est égale à $1/3$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention, pour la première fois, des deux côtés de la pièce. On admet que l'événement *« la pièce tombe toujours du même côté »* est de probabilité nulle.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance et calculer E(X).
3. Calcul de la variance de X.
   (a) Montrer que X(X −1) admet une espérance et calculer E(X(X −1)).
   (b) En déduire l'existence puis la valeur de V (X).

Exercice 12.
Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec la règle suivante : si on obtient une boule rouge, on arrête ; si on obtient la boule blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule rouge avant d'effectuer un nouveau tirage. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

On admet que l'événement *« on ne tire jamais de boule rouge »* est de probabilité nulle.

1. Déterminer la loi de T.
2. On pose : S = T + 1.
   (a) Donner la loi de S.
   (b) Montrer que S admet une espérance et la calculer.
   (c) En déduire que T admet une espérance et donner sa valeur.
3. Calcul de la variance de T.
   (a) Montrer que (T −1)(T + 1) admet une espérance et calculer E((T −1)(T + 1)).
   (b) En déduire l'existence puis la valeur de V (T).

Exercice 13.
Une roue de loterie se compose de secteurs identiques de trois couleurs différentes : rouge, blanc et vert. Un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe. Chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

- Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 16 euros.
- Si le secteur repéré est blanc, le joueur perd 12 euros.
- Si le secteur repéré est vert, il lance une seconde fois la roue :
  - si le secteur repéré est rouge, il gagne 8 euros.
  - si le secteur repéré est blanc, il perd 2 euros.
  - si le secteur repéré est vert, il ne gagne rien et ne perd rien.

La roue se compose de trois secteurs rouges, de quatre secteurs blancs, et de n secteurs verts où n est un entier naturel non nul. On note X la variable aléatoire au gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
2. Quelle est la probabilité de l'événement E : « Le joueur est gagnant » ?
3. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.
   On pourra l'exprimer en fonction de n.
4. Étudier les variations de la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{x}{(x+7)^2}$$
5. En déduire pour quelle valeur de n l'espérance de X est maximale.
   Quelle est la valeur de $E(X)$ correspondante ?