Feuille d'exercices 20 : Probabilités sur un univers infini

Exercice 1.
On dispose d'une pièce potentiellement truquée, dont la probabilité de faire « Face » est $p \in]0;1[$. On effectue une série illimitée de lancers avec cette pièce.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note l'événement

$$P_n : \text{« Les n-ième lancer donne pile »} \qquad F_n : \text{« Les n-ième lancer donne face »}$$

et

$$A_n : \text{« Les n premiers lancers on toujours donné le même coté de la pièce »}$$

1. À l'aide d'un arbre, calculer les probabilités de A_2 et A_3.
Elles seront exprimées en fonction de p.

2. (a) Exprimer l'événement A_n en fonction des P_n et F_n.
(b) Quelle est la probabilité de l'événement A_n ?

3. Exprimer l'événement

A : « La pièce tombe toujours du même coté »

en fonction des P_n et F_n, puis calculer sa probabilité.

Exercice 2.
Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne que l'on remet après avoir noté la couleur, jusqu'à ce que l'on obtienne la boule noire. On considère les événements suivants :
— A : « on effectue un nombre fini de tirages »,
— pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$F_n : \text{« le jeu s'arrête au n ème tirage »}$$

— pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$B_n : \text{« on tire une boule blanche au n ème tirage ».}$$

1. Démontrer que les événements F_n sont deux à deux incompatibles.

2. Exprimer l'événement F_n en fonction des événements B_i ($i \in [\![1, n]\!]$).

3. Calculer $P(F_n)$ en fonction de n.

4. Exprimer A en fonction des événements F_n et déterminer P(A).

Exercice 3.
On considère une particule se déposant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B, C d'un triangle selon le procédé suivant :
- si la particule se trouve en B, elle y reste.
- si la particule se trouve en A, elle se trouve à la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable.
- si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois, et elle va en B sept fois plus souvent qu'en A.
- à la première seconde, elle se pose au hasard sur l'un des trois sommets.

Pour tout $n \geq 1$,on note $\mathrm{A_n}$ (resp. $\mathrm{B_n}$,$\mathrm{C_n}$) l'événement :
« à la n-ieme seconde, la particule se trouve en A (resp. B, C) »
On note $\mathrm{a_n}$, $\mathrm{b_n}$, $\mathrm{c_n}$ les probabilités des événements $\mathrm{A_n}$,$\mathrm{B_n}$,$\mathrm{C_n}$.

1. Que valent $\mathrm{a_1}$, $\mathrm{b_1}$, $\mathrm{c_1}$?

2. Donner une relation de récurrence entre $\mathrm{a_{n+1}}$,$\mathrm{b_{n+1}}$,$\mathrm{c_{n+1}}$ et $\mathrm{a_n}$, $\mathrm{b_n}$, $\mathrm{c_n}$.

3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}$
<u>Indication :</u> On pourra d'abord montrer que $(\mathrm{c_n})$ est récurrente linéaire d'ordre 2.

4. Étudier la convergence des suites $(\mathrm{a_n})$, $(\mathrm{b_n})$, $(\mathrm{c_n})$. Interpréter.

Exercice 4.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance un dé équilibré à six faces n fois de suite. On considère l'évènement :
A_n *: « les nombres 1, 2 et 3 apparaissent tous au moins une fois lors des n lancers ».*
On pose $\mathrm{p_n} = \mathrm{P(A_n)}$. Pour tout nombre entier i $\in \{1,2,3\}$, on pose :
B_i *: « le numéro i n'apparaît pas durant les n tirages »*

1. Calculer les probabilités $P(B_1)$, $P(B_1 \cap B_2)$ et $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$.

2. En déduire la probabilité $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$.

3. En déduire que $p_n = 1 - 3\left(\frac{5}{6}\right)^n + 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ et interpréter cette limite.

Exercice 5.
On considère une série infinie d'urnes $(U_n)_{n\geq 2}$. Chaque urne contient des boules blanches et des boules noires. L'expérience est la suivante : on tire une boule dans U_2 , une boule dans U_3 , etc. jusqu'à obtenir pour la première fois une boule noire.

1. Exprimer les événements A_n *: « les tirages dans les urnes numérotées de 2 à n n'amènent que des boules blanches. »* et A *: « on ne tire jamais de boule noire »* en fonction des événements

   $\mathrm{B_n}$: « Le tirage effectué dans l'urne n amène une boule blanche. »
2. On suppose que pour tout entier $n \geq 2$, l'urne U_n contient n boules dont une seule noire. Calculer $P(A_n)$ et en déduire la valeur de $P(A)$.
3. On suppose que pour tout entier $n \geq 2$, l'urne U_n contient n^2 boules dont une seule noire.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$: $P(A_n) = \frac{n+1}{2n}$.
   (b) En déduire la valeur de $P(A)$.

Exercice 6.
On dispose de deux pièces d'apparence identique :

La pièce A est équilibrée, et la pièce B donne pile avec probabilité $\frac{2}{3}$.

Pour le premier lancer du jeu, on choisit une pièce au hasard et pour les coups suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient pile, on garde la pièce pour le lancer suivant et si on obtient face, on change de pièce pour le lancer suivant. On note, pour tout entier k non nul

A_k *: « le k-ième lancer se fait avec la pièce A »*, $B_k = \overline{A_k}$

et

E_k, *: « le k-ième lancer donne Pile »*

1. Trouver une relation entre $\mathrm{P(E_k)}$ et $\mathrm{P(A_k)}$.
2. Trouver une relation entre $\mathrm{P(A_{k+1})}$ et $\mathrm{P(A_k)}$.
3. En déduire $\mathrm{P(A_k)}$ et $\mathrm{P(E_k)}$

Exercice 7.
Deux joueurs A et B jouent chacun avec deux dés équilibrés. A gagnera en amenant un total de 7, et B en amenant un total de 6. B joue le premier et ensuite A et B jouent alternativement. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux gagne.

1. Déterminer la probabilité des événements

   G_A *: « le joueur A obtient 7 »* et G_B *: « le joueur B obtient 6 »*
2. On introduit les événements

   B_n *(resp. A_n) : « le joueur B (resp A) gagne à son n-ieme lancer ».*

   Déterminer la probabilité de ces événements.
3. On note $\mathrm{V_A}$ (resp. $\mathrm{V_B}$) l'événement *« le jouer A (resp. B) gagne »*.
   Décrire ces deux événements en fonction des événements précédents.
4. En déduire la probabilité de $\mathrm{V_A}$ et $\mathrm{V_B}$. Le jeu est-il équilibré ?

Exercice 8.
On effectue une infinité de lancers d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir face est $p \in]0,1[$.

1. Soit, pour n ≥ 2,

   A_n *« au cours des n premiers lancers, face n'est jamais suivi de pile »*

   Montrer que $P(A_n) = \begin{cases} \frac{p^{n+1}-(1-p)^{n+1}}{2p-1} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{n+1}{2^n} & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$
2. Est-il possible que face ne soit jamais suivi de pile ?