

Fiche méthode n°12 – Continuité et dérivabilité

Pour montrer qu'une fonction est continue :

- **Sur un intervalle :** Justifier qu'elle est combinaison (produit, somme, quotient avec dénominateur $\neq 0$, composée) de fonctions continues de référence (polynômes, exp, logarithme, puissances).
- **En un point :** montrer que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = f(a)$$

Avec le théorème des valeurs intermédiaires, je peux :

- Montrer qu'une fonction continue réalise une surjection.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur un intervalle $[a, b]$ lorsque $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés.

Avec le théorème de la bijection, je peux :

- Montrer qu'une fonction continue *strictement monotone* réalise une bijection.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une *unique* solution sur un intervalle $[a, b]$ lorsque $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés.

→ On s'appuie généralement sur un tableau de variations pour conclure.

Pour montrer qu'une fonction est dérivable, je peux :

- **Sur un intervalle :** Justifier qu'elle est combinaison (...) de fonctions dérivables de référence (...).

- **En un point :** Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \nearrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Utiliser le *théorème de prolongement C^1* afin de "prolonger" la fonction dérivée en a .

Pour montrer qu'une fonction est de classe C^k , je peux :

- Justifier qu'elle est combinaison (...) de fonctions de classe C^k de référence (...).
- Montrer qu'elle est k fois dérivable, et que la dérivée $f^{(k)}$ est continue.
- Pour la classe C^1 , utiliser le théorème de prolongement C^1 .

Pour utiliser l'inégalité des accroissements finis, je peux :

- Justifier que $m \leq f'(x) \leq M$ et conclure à l'encadrement
$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$
- Justifier que $|f'(x)| \leq M$ et conclure que
$$|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$$

Conseil : Apprenez à reconnaître ce type d'inégalités dans un énoncé.

Pour étudier la convexité d'une fonction, je peux :

- Si elle est deux fois dérivable (vrai en général), étudier le signe de $f''(x)$.
- Si elle est une fois dérivable seulement, établir que f' est croissante.
- Si elle n'est pas dérivable, montrer que
$$\forall t \in [0, 1], \forall (x, y), f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Pour trouver les points d'inflexion d'une courbe, je peux :

- Déterminer les points où la fonction change de convexité.