Fiche méthode n°13 – Probabilités sur un univers infini

Pour décrire un événement à l'aide des symboles $\cap$ et $\cup$:

On fonctionne par mots clés :

- *"au moins une fois", "au bout d'un nombre fini d'étapes", ".. ou bien .."* correspondent à une union $\cup$
- *"chaque/chacun(e)", "toutes", "pour toute",* ... correspondent à l'intersection $\cap$

Pour calculer la probabilité d'une union de 2 ou 3 événements :

On utilise les formules du crible de Poincaré :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

ou

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

Pour calculer la probabilité d'une union infinie $\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$:

- Si les événements sont *incompatibles/disjoints* ($E_i\cap E_j=\emptyset$ si $i\neq j$), par définition des probabilités :

$$P(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k)=\sum_{k=0}^{\infty} P(E_k) \quad .$$

- On utilise le théorème similaire aux séries :

$$P(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k)=\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=0}^{n} E_k)$$

- On passe au complémentaire et on utilise les *lois de de Morgan* pour se ramener à une intersection infinie :

$$P(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k)=P(\overline{\bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{E_k}})=1-P(\bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{E_k})$$

Pour calculer la probabiliré d'une intersection finie $\bigcap_{k=0}^{n} E_k$:

- S'il est supposé que les événements sont *mutuellement indépendants* :

$$P(\bigcap_k E_k)=\prod_k P(E_k)$$

mots clés : "*tirages avec remise", "réalisations indépendantes", ...*

- Si non, on utilise la *formule de probabilités composées* :

$$P(E_1\cap E_2\cap\ldots\cap E_n)=P(E_1)\times P_{E_1}(E_2)\times P_{E_1\cap E_2}(E_3)\times\ldots\times P_{E_1\cap\ldots\cap E_{n-1}}(E_n)$$

Utile pour décrire des successions / scénarios à n étapes (tirages, lancers de dé)

Pour calculer la probabilité d'une intersection infinie $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$:

- On utilise le théorème smilaire aux séries :

$$P(\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k)=\lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=0}^{n} E_k)$$

- On utilise les *lois de de Morgan* pour se ramener à une union infinie :

$$P(\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k)=P(\overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \overline{E_k}})=1-P(\bigcup_{k=0}^{\infty} \overline{E_k})$$

Comment utiliser la formule de probabilités totales ?

Si on dispose d'un *système complet dévénements* $E_0, E_1, E_2, \ldots$

c'est-à-dire : $\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k=\Omega$ et $E_i\cap E_j=\emptyset$ pour $i\neq j$

ou simplement : *"des événements décrivant tous les cas de figure sans redondance"*

On peut calculer la probabilité d'un événement A avec les formules suivantes :

$$P(A)=\sum_{k=0}^{\infty} P(A\cap E_k)=\sum_{k=0}^{\infty} P(E_k)\times P_{E_k}(A)$$