Fiche méthode n°11 – Séries numériques

Pour montrer qu'une série $\sum u_k$ est convergente, je peux :

- Montrer que sa *somme partielle* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge lorsque n tend vers +∞

  ☞ cela signifie que $\lim_{n\to+\infty} S_n$ est finie.
- Montrer qu'elle se décompose (somme, ...) en séries convergentes de référence :
  - $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} k\,q^{k-1}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2}$ qui convergent à condition que -1 < q < 1
  - $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ qui converge pour tout $x \in \mathbb{R}$
- Montrer qu'elle est *absolument convergente*, c'est-à-dire que $\sum |u_k|$ converge.

Pour montrer qu'une série est divergente, je peux :

- Montrer que sa somme partielle S_n diverge lorsque n tend vers +∞.

  ☞ cela signifie que $\lim_{n\to+\infty} S_n$ nexiste pas, ou bien qu'elle est infinie.
- Montrer que son terme général u_n ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers +∞.

  ☞ on dira que la série diverge *grossièrement*
- Reconnaître que la série en jeu est la *série harmonique*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

  qui diverge.

Pour calculer la valeur (la *somme*) d'une série, je peux :

- Calculer la limite de sa somme partielle S_n lorsque n tend vers +∞

  ☞ On écrit alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right)$.
- La décomposer (somme, ...) en séries de référence, et utiliser les formules
  - $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} k\,q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$

    qui convergent à condition que -1 < q < 1
  - $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ qui converge pour tout $x \in \mathbb{R}$

NB : ces dernières formules sont à connaître par coeur !