Fiche méthode n°14 – Intégrales

Pour déterminer la primitive d'une fonction je peux :

- Décomposer la fonction en somme, et traiter chaque terme séparément.
- Reconnaître les formules du formulaire.
  Éventuellement, les faire apparaître par des manipulations

☞ On peut vérifier sa réponse en dérivant la primitive : il faut retrouver la fonction de départ.

Pour calculer une intégrale $I=\int_a^b f(t)\,dt$ **je peux :**

- Calculer directement $I=[F(t)]_a^b=F(b)-F(a)$ où F est une primitive de *f*.
- Décomposer l'intégrale (somme, ...) et calculer chaque terme obtenu.
- Effectuer une *intégration par parties*, en identifiant $u'\times v$ sous l'intégrale :

$$\int_a^b u'\times v=[u\times v]_a^b-\int_a^b u\times v'$$

  ☞ Choix idéal pour u' : fonction qu'on *sait* primitiver (e^x , polynôme , primitives du formulaire, ...)

  ☞ Choix idéal pour v : fonction qu'on *veut* dériver (ln(x) , polynôme , ...)

- Effectuer un *changement de variable* $t\to u(t)$ en trois temps :
  - Calculer $du=u'(t)\,dt$.
  - Changer les bornes $t=a\to u=u(a)$ et $t=b\to u=u(b)$
  - Faire les changements de *t* et *dt* dans I afin d'obtenir une intégrale en *u*.
- Calculer la *somme de Riemann*

$$S_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{ou} \quad S_n'(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

  - Lorsque $n\to+\infty$ ces sommes tendent vers la valeur exacte de I.
  - Lorsque n est grand, elles donnent une valeur approchée de I.

Pour encadrer/minorer/majorer une intégrale, je peux :

- Utiliser la propriété $f\leq g\Rightarrow\int_a^b f(t)\,dt\leq\int_a^b g(t)\,dt$ (si $a\leq b$)

  ☞ Un tel raisonnement peut commencer par l'encadrement " $a\leq x\leq b$ "

- Utiliser *l'inégalité triangulaire*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq\int_a^b |f(t)|\,dt$$