Exercice 1. *D'après EDHEC 2020.*
Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx$$

1. Calculer l'intégrale I_0.

2. Démontrer que $I_1 = \ln(2) - \frac{1}{2}$ de deux manières :

(a) À l'aide d'une intégration par parties.

(b) À l'aide du changement de variable $u = 1 + x$.

3. (a) Pour tout entier naturel n, exprimer la somme $I_n + 2I_{n+1} + I_{n+2}$ comme une seule intégrale, et calculer sa valeur.

(b) En déduire la valeur de l'intégrale $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)^2}dx$.

4. (a) Écrire $I_{n+1} - I_n$ comme une seule intégrale.

(b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

(c) Justifier que, pour tout entier naturel n, $I_n \geq 0$.

(d) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

5. (a) Montrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$, on a

$$0 \leq \frac{1}{(x+1)^2} \leq 1$$

et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

(b) En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 2. *D'après ECRICOME 2004.*
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices A^2 et A^3.

2. Donner la matrice A^k pour $k \geq 3$.

3. Pour tout réel t, on définit la matrice $E(t)$ par :

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$

où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

(a) Montrer que :

$$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)\,E(t') = E(t + t')$$

(b) Pour tout t réel, calculer $E(t)\,E(-t)$.
En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$.

(c) En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n,

$$[E(t)]^n = E(nt)$$

et exprimer $[E(t)]^n$ en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$ et n.

Exercice 3. *D'après ESC 2005.*
Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher.
On effectue une série illimitée de tirages dans l'urne avec la règle suivante :

- Si la boule tirée est bleue, on la remet dans l'urne.
- Si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

Pour tout entier naturel n non nul, on note les événements :

- A_n : " L'urne contient 1 boule bleue à l'issue du n-ième tirage "
- B_n : " L'urne contient 2 boules bleues à l'issue du n-ième tirage "
- C_n : " L'urne contient 3 boules bleues à l'issue du n-ième tirage "

et a_n, b_n, c_n les probabilités respectives de A_n, B_n et C_n.

Par exemple, la succession de tirages :

Bleu - Bleu - Rouge - Bleu - Rouge

correspond à l'événement $A_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap C_5$ et l'urne contient 3 boules bleues à l'issue de ces 5 tirages.

On notera que le nombre de boules bleues dans l'urne ne fait qu'augmenter (au sens large) au cours de cette expérience.

1. Calculer les probabilités a_1, b_1 et c_1.

2. Montrer que $b_2 = \dfrac{2}{3}$. *On pourra s'aider d'un arbre.*

3. Expliquer pourquoi $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. (a) En utilisant le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n), montrer que

$$\forall n \geq 2,\ b_{n+1} = \frac{2}{3} b_n + \frac{2}{3^{n+1}}.$$

On pourra utiliser la formule des probabilités totales, ou un arbre de probabilités comportant les tirages n et $n+1$.

(b) Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n = 1$?

5. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$b_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}$$

6. Expliquer pourquoi on a : $a_n + b_n + c_n = 1$ pour tout entier n non nul.

7. En utilisant les questions précédentes, déterminer la probabilité c_n.

8. Calculer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n) et interpréter leurs valeurs.