Devoir libre n°11

À rendre le 28/3/2024

Exercice 1

Une urne contient 5 boules : 1 rouge et 4 bleues. On effectue des tirages avec remise dans cette urne jusqu'à obtenir une boule rouge. Pour tout entier n non nul, on pose les évènements : R_n *: "Le n-ième tirage donne une boule rouge"*

et T_n *: "Une boule rouge apparaît pour la première fois au n-ième tirage"*

et on note $p_n = P(T_n)$.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, Exprimer T_n en fonction des $\{R_n\}$.
2. Calculer p_1 et p_2.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ p_n = \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$.
4. Quelle est la nature de la suite $(p_n)_n$? Préciser ses éléments caractéristiques.
5. Décrire, avec des mots, l'événement $T = \cup_{n=1}^{+\infty} T_n$.
6. Montrer que $P(T) = 1$ et interpréter ce résultat.

Exercice 2

Soit n un entier naturel. On considère la fonction définie que $[0\,;1]$ par $g_n(x) = e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

On conviendra dans cet exercice que $0^0 = 1$.

1. Calculer g(0) et g(1).
2. Montrer que la fonction g_n est dérivable, et calculer $g_n'(x)$.
3. Montrer que , pour x in [0;1] , on a $|g'(x)| \leq \frac{1}{n!}$
4. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\left| \frac{1}{e} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1 \right| \leq \frac{1}{n!}$.
5. En déduire la valeur de la série $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.