Devoir libre n°12

À rendre le 29/4/2024 ou pendant les vacances...

Ce devoir doit vous préparer au concours blanc, qui se déroule à la rentrée des vacances d'avril.

Si vous souhaitez obtenir la correction du devoir pendant les vacances, alors il vous suffit de me l'envoyer en photo.

Exercice 1 *Intégrales*

Choisir et traiter l'un des deux exercices

Choix A (Moyen, mais avec du Python)

Pour tout entier n on pose $I_n=\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$.

1. Calculer I_0 .

2. a) Calculer l'intégrale I_0+I_1 .

   b) En déduire la valeur de l'intégrale I_1 .

3. a) Compléter le script Python sur cette page afin de calculer une valeur approchée de I_2 par une somme de Riemann.

   b) Avec un site comme https://www.programiz.com/ executer le script et donner une valeur approchée I_2 .

   Arrondir au centième.

4. a) Justifier que $\forall x\in[0,1]$, $0\leq\frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\leq x^{2n+1}$.

   b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq I_n\leq\frac{1}{2n+2}$.

   c) Montrer que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

```
import numpy as np

a= ...
b= ...
n=1000

S=0
for k in range(0,n+1):
   S=S + ...
print(S)
```

Choix B, d'après EMLyon 91 (Moyen, mais avec une IPP)

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n=\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$.

1. Calculer l'intégrale I_1 .

2. a) Justifier que $\forall t\in[0,1],0\leq\frac{t^n}{1+t^2}\leq t^n$.

   b) En déduire un encadrement de I_n .

3. Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

4. On pose, pour tout entier $n\geq1$, $J_n=\int_0^1 t^n\ln(1+t^2)dt$.

   a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n\geq1, J_n=\frac{\ln(2)}{n+1}-\frac{2}{n+1}I_{n+2}$.

   b) En déduire que la suite (J_n) est convergente et donner sa limite..

   c) Calculer $\lim_{n\to\infty}(n\times J_n)$

Exercice 2 *Fonction et suite*

Choisir et traiter l'un des trois exercices.

Choix A, issu du DS2 2022 (Moyen)

Partie A : Factorisation d'un polynôme.

$$P(X)=X^3+X^2-X-1$$

On considère le polynôme

1. Montrer que 1 est racine du polynôme P .

2. Écrire $P(X)$ sous la forme d'une produit de $X-1$ par un autre polynôme $Q(X)$ qu'on déterminera.

3. En déduire toutes les racines du polynôme P .

4. Donner le tableau de signes du polynôme P .

Partie B : Étude d'une fonction.

$$f(x)=x^3+x^2-1$$

On considère la fonction définie sur l'intervalle $[-1\,;1]$ par

5. Calculer $f(-1)$ et $f(1)$, et vérifier que $f\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{-23}{27}$.

6. Étudier les variations de la fonction f sur $[-1\,;1]$.

7. Donner le minimum et la maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente.

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,u_{n+1}=u_n^3+u_n^2-1$$

On considère la suite définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et la relation de récurrence

8. Calculer le terme u_1 sous forme de fraction irréductible.

9. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n\in[-1\,;1]$.

   On pourra utiliser une réponse obtenues à la partie B.

10. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

    On pourra utiliser le tableau de signes obtenu à la question 4, et le fait que $u_n\in[-1\,;1]$.

11. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

12. On admet que la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'équation $\ell=\ell^3+\ell^2-1$. Déterminer la valeur de ℓ .

Choix B (Moyen-Difficile)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2 e^x-1$.

Partie A : étude d'une fonction.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$, en justifiant soigneusement.
2. Justifier que la fonction f est dérivable, et calculer sa fonction dérivée.
3. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f, en y précisant les limites de la question 1, ainsi que f(0) et f(2).
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
5. Justifier que $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$.

Partie B : étude d'une suite.

On considère la suite définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n^3 e^{u_n}$

6. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n\geq 1$.
7. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
8. En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
9. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Choix C (Facile)

On définit la fonction *f* sur [0;2] par $f(x)=\ln(2+x)$.

1. Justifier que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution sur [0;2] que l'on notera α.
   On étudiera la fonction $g(x)=f(x)-x$.
2. Dériver la fonction f et montrer que $\forall x\in[0;2],\quad |f'(x)|\leq\frac{1}{2}$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\ln(u_n+2)=f(u_n)$.
   a) Justifier que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}(u_n-\alpha)$.
   b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha|\leq 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$
   c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 3 *ECRICOME 2022, concours blanc 2022 et mini-devoir n°1 de cette année*

Cet exercice est obligatoire pour tout le monde, et comporte tous les degrés de difficulté.

Partie A : Calcul matriciel.

On considère les matrices $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ et $B=I_3-A$.

Devoir libre n°12

À rendre le 29/4/2024 ou pendant les vacances...

1. Expliciter la matrice B .

2. Calculer les matrices $A\times B$ et $B\times A$.

3. Vérifier par le calcul que $A^2=A$ et $B^2=B$.

Partie B : Résolution d'une équation matricielle.

Dans cette partie, on cherche à déterminer les matrices de la forme $M=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, avec $a\,,b$ des nombres réels,

vérifiant $M^2=M$. On notera S l'ensemble solution.

4. Justifier que les matrices A et B de la partie **A** sont solutions.

5. Montrer qu'une matrice M est solution si et seulement si $\begin{cases} a^2+2b^2=a \\ b(b+2a-1)=0 \end{cases}$

6. En déduire que les solutions recherchées sont $S=\{0_3\,;I_3\,;A\,;B\}$.

Partie C : Étude matricielle de suites imbriquées.

On considère les matrices $T=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, ainsi que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

définies par $u_0=2\,,v_0=2\,,w_0=1$ et $\begin{cases} u_{n+1}=4u_n+v_n+w_n+2 \\ v_{n+1}=u_n+4v_n+w_n-2 \\ w_{n+1}=u_n+v_n+4w_n \end{cases}$. On pose par ailleurs $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

7. Donner le vecteur X_0 .

8. Montrer que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1}=T\,X_n+Y$.

9. Déterminer un vecteur-colonne $L=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $L=T\,L+Y$.

10. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $X_n=T^n(X_0-L)+L$

11. Déterminer deux réels α et β tel que $T=\alpha A+\beta B$, où les matrices A et B ont été définies dans la partie **A**.

12. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $T^n=\alpha^n A+\beta^n B$

13. Déterminer l'expression de X_n en fonction de n , et en déduire u_n , v_n et w_n en fonction de n .

14. Déterminer les limites $\lim_{n\to+\infty} u_n$, $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice 4 *Probabilités*

Cet exercice est obligatoire pour tout le monde, et comporte tous les degrés de difficulté.

On considère deux urnes :

- une urne verte contenant une boule rouge et trois boules vertes,
- une urne rouge contenant deux boules rouges et deux boules vertes.

On effectue une suite de tirages avec remise, de la façon suivante :

- le premier tirage est effectué dans l'urne verte.
- à partir du second, ils sont effectués dans l'urne dont la couleur est celle de la boule obtenue au tirage précedent.

Pour tout entier n non nul, on notera :

V_n : "tirer une boule verte au n-ième tirage", R_n : "tirer une boule rouge au n-ième tirage"

$$v_n = P(v_n) \quad \text{et} \quad r_n = P(R_n)$$

Partie A : Deux premiers tirages

1. Si le premier tirage a donné une boule rouge, quelle est la probabilité d'obtenir alors une boule verte au second tirage ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte au second tirage ?
3. On a obtenu une boule verte au second tirage.
   Quelle est la probabilité que ce tirage ait été effectué dans l'urne rouge ?

Partie B : Trois premiers tirages

Déterminer la probabilité d'obtenir :

4. La première boule verte au troisième tirage.
5. La première boule rouge au troisième tirage.
6. Au moins une boule verte au cours des trois premiers tirages.
7. Une seule boule rouge au cours des trois premiers tirages.

Partie C : Le n-ième tirage

8. Pour tout entier n non nul, déterminer v_{n+1} en fonction de v_n et r_n .
9. En déduire que $v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n + \frac{1}{2}$ puis l'expression de v_n en fonction de n.

Partie D : La première rouge

Soit X le rang d'apparition de la première boule rouge.

10. Pour tout entier n non nul, décomposer l'événement

E_n : « La première boule rouge est tirée au tirage numéro n »

en fonction des événements $V_1, V_2, \ldots, V_n, R_1, \ldots, R_n$.

11. En déduire la probabilité de l'événement E_n.

Exercice 5 *Variables aléatoires*

Choix A (Facile)

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance une pièce 3 fois et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu. En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien.

La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à 2/3, et celle d'obtenir Face est de 1/3. On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Enfn, on notera A l'événement : "le joueur est déclaré vainqueur " et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X ? Dresser la loi de X et calculer E(X).
2. Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$ puis expliciter la loi de G.
3. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Choix B (Moyen)

Soit *n* un entier naturel non nul. On effectue *n* lancers avec une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$ et la probabilité d'obtenir face est q=1-p. On dit qu'un lancer donné réalise un *changement* s'il amène un résultat différent du lancer précédent. On note alors X_n le nombre de changements survenus au cours des n lancers.
Par exemple, si on effectue n=5 lancers qui donnent : Pile-Face-Face-Pile-Face alors $X_5=3$.

1. Pour commencer, on considère la situation où on effectue n=2 lancers.
   a) Donner la loi de X_2
   b) Calculer l'espérance et la variance de X_2
2. À présent, on considère que n=3.
   Donner la loi de X_3, et vérifier que $E(X_3)=4pq$.
3. **(plus difficile)** On considère que n=4. Donner la loi de X_4 et calculer son espérance.