Devoir des vacances.

Passage CPGE1 - CPGE2

Semaine 2 : Convergence, continuité, dérivabilité, équations différentielles.

Exercice 1

Soit l'équation $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet trois solutions réelles α, β et γ telles que $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$.

2. Justifier que $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et montrer que β vérifie $\frac{\beta^3 + 1}{3} = \beta$

3. On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$.

   a) Dresser le tableau de variations de g.

   b) Justifier que $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow g(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

   c) Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

4. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

   b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4} |u_n - \beta|$ puis que $|u_n - \beta| \leq \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$.

   c) En déduire que la suite u converge vers β.

5. a) Trouver une valeur de n pour laquelle $|u_n - \beta| \leq 10^{-9}$.

   b) Ecrire un programme Python qui renvoie une valeur approchée de β à 10^{-9} près.

Devoir des vacances.

Passage CPGE1 - CPGE2

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

1. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$, et montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f'(x)=\dfrac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$.

2. a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)=1+\dfrac{2}{e^{2x}-1}$.

   b) En déduire le limite de f en $+\infty$

   c) Déterminer la limite de la fonction f en 0 (par valeurs supérieures).

3. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

   Déterminer le signe de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

4. a) Justifier la dérivabilité de la fonction g définie par: $g(x)=\ln(e^{2x}-1)-x$ et calculer g'(x)..

   b) En déduire une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

   c) Déterminer le sens de variation de g et sa limite en 0 par valeur supérieure.

   d) En écrivant $e^{2x}-1=e^{2x}(1-e^{-2x})$, déterminer la limite de g en $+\infty$.

   e) Montrer que l'équation g(x) = 0 a une unique solution sur $]0\,;+\infty[$

5. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^*, f(-x)=f(x)$.

   En déduire une symétrie de la courbe représentative de f, qu'on notera C.

6. Calculer *f*(ln(3)) et *f'*(ln(3)).

7. Dessiner la courbe représentative de la fonction f.

   On donne les valeurs approchées :

$\ln(3)$	$5/4$	$9/16$	$9/32$
$1,1$	$1,2$	$0,6$	$0,3$

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y''+2y'+y=1+2e^{-3t}$$

1. Montrer que les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont les combinaisons linéaires des fonctions $t\mapsto e^{-t}$ et $t\mapsto te^{-t}$.
2. Déterminer un nombre réel a de sorte que la fonction $h(t)=ae^{-3t}$ soit solution particulière de l'équation différentielle
$$y''+2y'+y=2e^{-3t}$$
3. Déterminer une fonction constante solution de l'équation différentielle
$$y''+2y'+y=1$$
4. En déduire l'ensemble solution de (E).
5. Déterminer la limite, lorsque t tend vers $+\infty$, des solutions de (E).

Devoir des vacances.

Passage CPGE1 - CPGE2

Semaine 3 : Systèmes, Matrices, Espaces vectoriels, Applications linéaires

Exercice 4

On considère la matrice $K=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on essaye de déterminer l'ensemble des matrices M carrées d'ordre 3

vérifiant $K\times M=M\times K=M$

1. Trouver une matrice M simple qui vérifie clairement cette relation.

2. Montrer qu'une matrice $M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ vérifie $K\times M=M\times K=M$ si et seulement si *i=g=c=a, h=b* et *f=d*.

3. En déduire que M est alors de la forme $M=\begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix}$ où a,b,e,d sont des nombres réels.

4. Soit F l'ensemble des matrices $M\in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $K\times M=M\times K=M$.

   a) En utilisant la question 3, montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

   On pourra décomposer la forme trouvée convenablement en combinaison linéaire.

   b) Déterminer une base et la dimension de F.

   On pourra s'intéresser aux matrices qui interviennent dans la décomposition de la question 4.a)

Exercice 5

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x & +y & +z & =-5 \\ 2x & +13y & -7z & =-1 \\ x & -y & +z & =1 \end{cases}$$

2. Résoudre le système $\begin{cases} 4x & +3y & -5z & =a \\ 2x & -y & +z & =b \\ -3x & -y & +2z & =c \end{cases}$, où a, b et c sont des nombres réels donnés.

   On pourra exprimer les solutions en fonction de a, b et c.

3. Soit k un nombre réel donné. On considère alors le système

$$\begin{cases} x & -y & +z & =0 \\ kx & +8y & +2z & =0 \\ 2x & +ky & +z & =0 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de k ce système est-il de Cramer ?

Exercice 6

On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x\,;y\,;z)=(x+y-z\,;2x+y-3z\,;3x+2y-4z)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer le noyau Ker(f) et préciser sa dimension.
3. Déterminer l'image Im(f) et préciser sa dimension.
4. Vérifier le théorème du rang.
5. Est-ce que f est injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 7

Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et I la matrice unité de taille 3.

1. a) Calculer $A^2-4A+3I$
   b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que pour tout entier n, il existe des réels a_n et b_n tels que $A^n=a_nA+b_nI$.
3. a) Montrer que, pour tout entier n, $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$
   b) En déduire la valeur de a_n puis de b_n en fonction de n.
   c) Donner l'expression de A^n en fonction de n.

Devoir des vacances.

Passage CPGE1 - CPGE2

Semaine 4 : Séries et intégrales

Exercice 8

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

1. Calculer I_1 .

2. a) Justifier que $\forall t \in [0,1], 0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$.

   b) En déduire un encadrement de I_n .

3. Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

4. On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$.

   a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \geq 1, J_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}$.

   b) En déduire que la suite (J_n) est convergente et donner sa limite..

   c) Calculer $\lim_{n \to \infty} (n \times J_n)$

Exercice 9

On considère la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

1. Soit k un entier naturel non nul. Montrer que, pour $x \in [k, k+1]$ on a $\frac{1}{(k+1)^3} \leq \frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{k^3}$

2. En déduire que $\frac{1}{(k+1)^3} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^3} dx \leq \frac{1}{k^3}$.

3. En sommant l'encadrement précédent, montrer que $\int_1^{n+1} \frac{1}{x^3} dx \leq u_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^3} dx$.

4. En déduire que la suite (u_n) est majorée, et donner un majorant.

5. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

6. Justifier la convergence de la suite (u_n) , et que sa limite L vérifie $\frac{1}{2} \leq L \leq \frac{3}{2}$.

Semaine 5 : Probabilités, Variables aléatoires discrètes.

Exercice 10

On considère deux urnes :

- une urne verte contenant une boule rouge et trois boules vertes,
- une urne rouge contenant deux boules rouges et deux boules vertes.

On effectue une suite de tirages avec remise, de la façon suivante :

- le premier tirage est effectué dans l'urne verte.
- à partir du second, ils sont effectués dans l'urne dont la couleur est celle de la boule obtenue au tirage précedent.

Pour tout entier n non nul, on notera :

V_n *: "tirer une boule verte au n-ième tirage",* R_n *: "tirer une boule rouge au n-ième tirage"*

$$v_n = P(v_n) \quad \text{et} \quad r_n = P(R_n)$$

Partie 1 : Deux premiers tirages

1. Si le premier tirage a donné une boule rouge, quelle est la probabilité d'obtenir alors une boule verte au second tirage ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte au second tirage ?
3. On a obtenu une boule verte au second tirage.
   Quelle est la probabilité que ce tirage ait été effectué dans l'urne rouge ?

Partie 2 : Trois premiers tirages

Déterminer la probabilité d'obtenir :

4. La première boule verte au troisième tirage.
5. La première boule rouge au troisième tirage.
6. Au moins une boule verte au cours des trois premiers tirages.
7. Une seule boule rouge au cours des trois premiers tirages.

Partie 3 : Le n-ième tirage

8. Pour tout entier n non nul, déterminer v_{n+1} en fonction de v_n et r_n .
9. En déduire que $v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n + \frac{1}{2}$ puis l'expression de v_n en fonction de n.

Partie 4 : La première rouge

Soit X le rang d'apparition de la première boule rouge.

10. Pour tout entier n non nul, décomposer l'événement $(X = n)$ en fonction des événements $V_1, V_2, \dots, V_n, R_1, \dots, R_n$ et en déduire la loi de X.
    <u>Attention :</u> *ne concluez pas trop vite. Sommes nous réellement dans un schéma de Bernoulli ?*
11. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 11

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance une pièce 3 fois et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu. En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien.

La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à 2/3, et celle d'obtenir Face est de 1/3. On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Enfn, on notera A l'événement : *"le joueur est déclaré vainqueur "* et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

1. Reconnaître la loi de X et vérifier que $P(A)=\frac{13}{27}$.
2. Montrer que G(Ω) = { - 30 , - 10 , 0 , 20 } puis expliciter la loi de G.
3. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 12

On dispose d’un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence. On sait que 50 de ces pièces sont équilibrées tandis que les 50 autres sont truquées. Pour une pièce truquée, la probabilité d’apparition de ”pile” lors d’un jet de cette pièce vaut 3/4 On suppose que, pour une pièce donnée, sles différents lancers sont indépendants les uns des autres.

1. a) On prend une pièce au hasard dans ce lot et on la lance. Le résultat de ce jet est ”pile”.
   Quelle est alors la probabilité que la pièce choisie soit truquée ?
   b) On relance cette même pièce et on obtient à nouveau ”pile”.
   Quelle est alors la probabilité que la pièce choisie soit truquée ?
2. On désire effectuer un tri des pièces pour tenter d’éliminer celles qui sont truquées. Pour cel`a on prend les pièces du lot une à une et on lance chaque pièce deux fois.
   • Si au cours des deux lancers on obtient au moins un ”pile”, on décide d’éliminer la pièce.
   • Dans le cas contraire, on la conserve.

a) Quelle est la probabilité d’éliminer une pièce quand elle est équilibrée?
b) Quelle est la probabilité de conserver une pièce quand elle est truquée?
c) On note X_1 le nombre de pièces truquées et X_2 le nombre de pièces équilibrées qui sont ainsi éliminées.
   Déterminer les lois de X_1 et de X_2 ainsi que leur espérance. Que dire de l’efficacité du tri ?
   Donner enfin le nombre moyen de pièces éliminées.

Exercice 13

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall n\geq 2, P(X=n)=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

On sait de plus que les événements (X=0) et (X=1) ont la même probabilité. Déterminer cette probabilité.

Exercice 14

On dispose de deux urnes :

- L'urne 1 contient trois boules blanches
- L'urne 2 contient une boule blanche et deux boules noires

L'expérience consiste à choisir une fois pour toutes une urne au hasard (ce choix étant équiprobable) puis à y effectuer des tirages d'une boule avec remise, jusqu'à l'apparition d'une boule blanche.

On notera les événements

U_1 : "On a choisi l'urne 1" , U_2 : "On a choisi l'urne 2"

puis pour tout entier naturel $n\geq 1$,

B_n : " Lors du n-ième tirage, on a tiré une boule blanche" et $N_n=\overline{B_n}$

La variable aléatoire X désigne le nombre de tirages effectués jusqu'à l'obtention d'une boule blanche.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
2. a) Déterminer $P_{U_1}(X=1)$ et $P_{U_2}(X=1)$.
   b) À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire P(X=1).
3. a) Donner, de manière générale $P_{U_1}(X=n)$ et $P_{U_2}(X=n)$ pour $n\geq 2$.
   b) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $P(X=n)=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ pour $n\geq 2$.
4. Montrer que la variable aléatoire X possède une espérance et calculer E(X).
   On veillera à isoler le premier terme de ce calcul, de sorte que $E(X)=1\,P(X=1)+\sum_{n\geq 2} n\,P(X=n)$
5. Montrer que X possède une variance et calculer sa valeur.

Devoir des vacances.

Passage CPGE1 - CPGE2

Hors-programme : Diagonalisation

Exercice 15

Soient $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que U, V et W sont vecteurs propres de A, et préciser les valeurs propres associées.

Exercice 16

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que 1 et 2 sont valeurs propres de A.

Calculer les sous-espaces propres associées, et préciser leurs dimensions.

Exercice 17

Reprenons la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ de l'exercice 7. On rappelle que $A^2-4A+3I=0$.

1. Donner un polynôme annulateur de la matrice A.
   En déduire que 1 possède au maximum deux valeurs propres, qu'on précisera.
2. Déterminer les sous-espaces propres et les valeurs propres de A.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?
   Si oui, donner une matrices inversible P et une matrice diagonale D telles que $A=PDP^{-1}$.

Exercice 18

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de la matrice A.
2. Calculer les sous-espaces propres de A, et justiques que A est diagonalisable.
3. Déterminer une matrices inversible P et une matrice diagonale D telles que $A=PDP^{-1}$.

   On pourra admettre que $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $P=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, A^n=PD^nP^{-1}$
5. En déduire la matrice A^n pour tout entier naturel n.