

Approfondissements Semaine 1

Thème 1 : Séparation de sommes

A. Séparation d'une somme classique en termes pairs/impairs.

1. Rappeler la formule permettant de calculer la somme $1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$

2. En déduire la valeur de la somme $S_n = 1 + 2 + \dots + 2n = \sum_{k=1}^{2n} k$.

3. Exprimer la somme $P_n = 2 + 4 + 6 + \dots + (2n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k$ à l'aide d'un signe somme et calculer sa valeur.

4. En déduire la valeur de la somme $I_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} k$.

B. Une série inhabituelle.

On admet que la série $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, et que $S = \frac{\pi^2}{6}$.

5. En vous inspirant des questions précédentes, déterminer $P = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ puis $I = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Thème 2 : Factorisation de $a^n - b^n$

1. Montrer que pour tout entier naturel n , et tous réels a et b , on a $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=1}^n a^{k-1} b^{n-k}$

2. En déduire une factorisation de $a^5 - b^5$

3. Montrer que pour tout entier naturel n , la fonction définie par $f(x) = x^n$ est injective sur \mathbb{R}^+ et sur \mathbb{R}^- .

Thème 3 : Décomposition d'une fonction paire + impaire

1. Que peut-on dire d'une fonction qui est à la fois paire et impaire ?

2. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} .

a) On suppose qu'il existe une fonction paire p et une fonction impaire i telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = p(x) + i(x)$.

Montrer que nécessairement $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

b) On pose, $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Justifier que p est paire, que i est impaire, et que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = p(x) + i(x)$.

Toute fonction réelle peut donc s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

3. Montrer que la décomposition $f = p + i$ (où p est paire et i impaire) est unique.

4. On considère la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

En utilisant la question 2, décomposer cette fonction en somme de fonctions paire et impaire. Commenter.

Approfondissements Semaine 2

Thème 4 : Régularité d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} mais n'est pas deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

Thème 5 : Limite inférieure d'une suite.

Soit (u_n) une suite réelle positive.

Pour tout entier naturel n fixé, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_n(k) = \min_{i \in \{n, n+1, \dots, n+k\}} u_i$

En termes simples, $v_n(k)$ désigne la plus petite valeur parmi $u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{n+k}$.

1. Montrer que la suite $(v_n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer que la suite $(v_n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note alors $w_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_n(k)$.
3. Établir une inégalité entre $v_{n+1}(k)$ et $v_n(k+1)$, et en déduire que la suite (w_n) est croissante.
4. En déduire que la suite (w_n) possède une limite (éventuellement infinie) lorsque n tend vers $+\infty$.

La limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ est appelée *limite inférieure de la suite* (u_n) et est notée $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$

5. Dans cette question, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + (-1)^n$.

Calculer l'expression de $v_n(k)$ et de w_n . En déduire $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

6. Dans cette question, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

Calculer l'expression de $v_n(k)$ et de w_n . En déduire $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Thème 6 : Résolution d'une équation différentielle par changement de fonction inconnue

On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0$$

sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On suppose qu'une telle fonction y est donnée, et on pose $z = x^2 y$.

1. Calculer les expressions de z' et z'' .
2. Montrer que z vérifie une équation différentielle d'ordre 2 simple.
3. Résoudre cette équation différentielle afin de déterminer la fonction z .
4. Conclure : donner l'ensemble des fonctions y solutions de l'équation différentielle (E)

Approfondissements Semaine 3

Thème 7 : Décomposition d'une matrice en symétrique + antisymétrique

1. Que peut-on dire d'une matrice qui est à la fois symétrique et antisymétrique?

2. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

a) On suppose qu'il existe une matrice symétrique S et une matrice antisymétrique A telles que $M = S + A$.

$$\text{Montrer que nécessairement } S = \frac{M + {}^t M}{2} \text{ et } A = \frac{M - {}^t M}{2}$$

b) On pose $S = \frac{M + {}^t M}{2}$ et $A = \frac{M - {}^t M}{2}$

Justifier que S est symétrique, que A est antisymétrique, et que $M = S + A$.

Toute matrice carrée peut donc s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anisymétrique.

3. Montrer que la décomposition $M = S + A$ (où S est symétrique et A antisymétrique) est unique.

4. Décomposer la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ en somme symétrique + antisymétrique.

Thème 8 : Un contre-exemple important

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice M^3 et en déduire un polynôme anulateur de M.

2. Quelles sont les valeurs propres possibles de M ?

3. Calculer le déterminant de $M - \lambda I_2$ et montrer que M n'admet aucune valeur propre.

Thème 9 : Quelques calculs analytiques dans $M_n(\mathbb{R})$

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ deux matrice carrées d'ordre n.

On rappelle que $A \times B = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$ et que $A + B = (d_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ où $d_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$

1. On suppose A et B triangulaire supérieures : $i > j \Rightarrow (a_{i,j} = 0 \text{ et } b_{i,j} = 0)$.

Montrer que $A + B$ et $A \times B$ sont triangulaire par un calcul littéral, avec les notations ci-dessus.

2. La trace d'une matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est définie par $Tr(M) = \sum_{k=1}^n m_{k,k}$.

a) Interpréter la trace en termes simples. Quelle est la trace d'une matrice diagonale ?

b) Montrer par un calcul littéral que $Tr(AB) = Tr(BA)$

c) On suppose la matrice A diagonalisable et on écrit $A = P D P^{-1}$ avec P inversible et D diagonale.

Montrer que $Tr(A) = Tr(D)$.

d) En déduire un lien entre la trace d'une matrice diagonalisable et ses valeurs propres.

Approfondissements Semaine 4

Thème 10 : Sommation d'Abel

Soient (a_n) et (b_n) des suites de nombres. On pose $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

a) Démontrer que $\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$ (c'est la *formule de sommation d'Abel*)

b) En posant $a_k = 2^k$ et $b_k = k$, déterminer la formule permettant de calculer $\sum_{k=0}^n k 2^k$

Thème 11 : Le critère de convergence de d'Alembert

On suppose que (u_n) est une suite strictement positive telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Pour simplifier la rédaction, on notera $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on retient que $L < 1$.

1. Soit $q = \frac{L+1}{2}$.

a) Justifier que $L < q < 1$.

b) Justifier qu'il existe un entier N vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$.

2. Justifier que pour tout entier $n \geq N$, on a $u_{n+1} \leq q u_n$ et que $\forall n \geq N, u_n \leq u_N q^{n-N}$

3. Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

a) Quel est le sens de variation de la suite (S_n) ainsi définie ?

b) On suppose que $n > N$.

Montrer que $0 \leq S_n \leq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^n u_N q^{k-N}$ et que $0 \leq S_n \leq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + u_N \frac{1}{1-q}$

c) En déduire que la série $\sum u_k$ est convergente.

On a donc démontré le *critère de d'Alembert* :

Si (u_n) est une suite strictement positive telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors la série $\sum u_k$ est convergente.

4. Appliquer le critère de d'Alembert pour montrer que la série $S = \sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ converge.

Approfondissements Semaine 5

Thème 12 : Caractérisation de la loi géométrique comme loi à taux de panne constant

Soit X une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{N}^* vérifiant $P(X=n) > 0$ pour tout entier n non nul.

Le *taux de panne* de X est la suite définie par $u_n = P_{X \geq n}(X=n)$.

1. On suppose dans cette question que X suit une loi géométrique de raison p .
 - a) Déterminer $P(X \geq n)$
 - b) Montrer que le taux de panne de X est une suite constante.
2. On suppose dans cette question que X admet un taux de panne constant, égal à $p \in]0; 1[$
 - a) Exprimer $P(X=n)$ en fonction de $P(X \geq n)$ et $P(X \geq n+1)$
 - b) En déduire que $P(X=n+1) = (1-p)P(X=n)$.
 - c) Conclure que X suit une loi géométrique de paramètre p .

Thème 13 : Inégalité de Jensen et conséquences

Soit f une fonction convexe sur \mathbb{R} . On rappelle que cela signifie :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1], f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

1. Montrer l'*inégalité de Jensen* par récurrence sur $n \geq 2$:

Si x_1, \dots, x_n sont des nombres réels et t_1, \dots, t_n des réels positifs ou nuls tels que $t_1 + \dots + t_n = 1$, alors :

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \dots + t_n f(x_n)$$

Indication : pour l'hérédité, on supposera $t_1 + \dots + t_{n+1} = 1$ et on pourra écrire

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1}) = f\left((1-t_{n+1})\left(\frac{t_1}{1-t_{n+1}} x_1 + \frac{t_2}{1-t_{n+1}} x_2 + \dots + \frac{t_n}{1-t_{n+1}} x_n\right) + t_{n+1} x_{n+1}\right)$$

et utiliser la définition de la convexité réappelée avec $t = 1 - t_{n+1}$

2. Soit F une fonction convexe sur $[0,1]$.
 - a) Ecrire la somme de Riemann associée à une fonction continue f sur cet intervalle.
 - b) En posant $t_1 = t_2 = t_3 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$ montrer que $F\left(\int_0^1 f(x) dx\right) \leq \int_0^1 F(f(x)) dx$
3. Soit X une variable aléatoire à support fini, et f une fonction convexe.

Montrer que $f(E(X)) \leq E(f(X))$
3. En déduire que $E(X)^2 \leq E(X^2)$ et $e^{E(X)} \leq E(e^X)$